Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 5 21. Mai 2013

K bezeichnet einen nicht-archimedischen vollständigen Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O}$.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $(E_j)_{j\in J}$ eine Familie von lokal-konvexen K-Vektorräumen und $E := \prod_j E_j$, versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie: Ist q eine stetige Halbnorm auf E, so existiert eine eindeutige minimale endliche Teilmenge $J_q \subset J$, sodass

$$q\left(\prod_{j\in J\setminus J_q} E_j \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}\right) = 0.$$

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Sei V ein K-Banachraum. Zeigen Sie:

a) Ist $B = B_r(a) \subset K^n$, so gilt $\mathcal{A}_K(B,K)\widehat{\otimes}_K V \cong \mathcal{A}_K(B,V)$ (da $\mathcal{A}_K(B,K)$ ein Banachraum ist, müssen wir nicht genau spezifizieren, welches Tensorprodukt wir meinen).

b) Ist M eine kompakte K-analytische Mannigfaltigkeit, so gilt $C^{\mathrm{an}}(M,K)\ \widehat{\otimes}_{K,\pi} V \cong C^{\mathrm{an}}(M,V)$. (Was kann man im dem Fall, dass $V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ von kompaktem Typ mit V_n Banachraum für alle n ist, vermuten?)

c) Ist M eine parakompakte K-analytische Mannigfaltigkeit und I unendlich , so ist $\mathcal{A}_I(V) = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_K(M_i,\phi_i,V)$ kein Banachraum ($M_i \neq \emptyset$).

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Sei für diese Aufgabe K lokal-kompakt (sodass K nicht die diskrete Topologie hat). Sei V ein lokal-konvexer K-Vektorraum und $A \subset V$ ein $\mathcal{O}$-Untermodul. A heisst **kompaktoid**, falls für jedes offene Gitter $L \subset V$ endlich viele $v_1,\ldots,v_n$ existieren mit $A \subset L + \mathcal{O}v_1 + \ldots + \mathcal{O}v_n$.

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass $A \subset V$ beschränkt und c-kompakt ist genau dann, wenn A kompaktoid und vollständig ist (siehe Schneider, Non-Archimedean Functional Analysis, Proposition 12.7).

Zeigen Sie:

a) Ist $f : V \to W$ eine kompakte (lineare) Abbildung, so ist f c-kompakt genau dann, wenn ein offenes Gitter $L \subset V$ existiert, sodass $\overline{f(L)} \subset W$ kompakt ist.

b) Ist $B = B_r(a)$ mit disjunkter Zerlegung $B = \bigcup_k B_{r_k}(b_k)$ und $f : V \to W$ eine kompakte (lineare) injektive Abbildung, so ist

$$\mathcal{A}_K(B_r(a),K)\widehat{\otimes}_K V \longrightarrow \prod_k \mathcal{A}_K(B_{r_k}(b_k),K)\widehat{\otimes}_K W$$

kompakt.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 28. Mai 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.