Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 4 14. Mai 2013

K bezeichnet einen nicht-archimedischen vollständigen Körper. Kompakte Räume sind immer hausdorffsch.

Aufgabe 1. *(16 Punkte)*

Seien X, V topologische Räume. Wir betrachten die Menge

$$C(X,V) := \{f : X \to V \mid f \text{ stetig}\},$$

die man mit der **kompakt-offenen Topologie** versieht, d.h. man betrachtet die Topologie, die von allen Mengen $\mathcal{C}(K,U) := \{f \in C(X,V) \mid f(K) \subset U\}$ mit $K \subset X$ kompakt und $U \subset V$ offen erzeugt wird. Zeigen Sie:

a) Seien X, Y kompakte Räume. Dann ist $\rho : C(X \times Y, V) \to C(X, C(Y,V)),\ f \mapsto \tilde{f} = \{x \mapsto f(x,\cdot)\}$, wohldefiniert und bijektiv.

b) ρ aus a) ist ein Homöomorphismus.

Sei nun X kompakt und V ein vollständiger hausdorffscher lokal-konvexer K-Vektorraum definiert durch eine Familie von Gittern $\mathcal{L}$. Zeigen Sie:

c) $\{\mathcal{C}(X,L), L \in \mathcal{L}\}$ definiert eine Familie von Gittern von $C(X,V)$, die (lc1) und (lc2) erfüllen.

d) Ist p_L die zu $L \in \mathcal{L}$ assoziierte Halbnorm, so berechnet sich die zu $\mathcal{C}(X,L)$ assoziierte Halbnorm $p_{X,L}$ durch $p_{X,L}(f) = \sup_{x \in X} p_L(f(x))$.

e) $\{\mathcal{C}(K,L), K \subset X \text{ kompakt}, L \in \mathcal{L}\}$ definiert eine Familie von Gittern von $C(X,V)$, die (lc1) und (lc2) erfüllen.

f) Ist $p_{K,L}$ die zu $\mathcal{C}(K,L)$ assoziierte Halbnorm für $K \subset X$ kompakt und $L \in \mathcal{L}$, so ist die Topologie auf $C(X,V)$, die von der Familie von Halbnormen $\{p_{X,L} \mid L \in \mathcal{L}\}$ erzeugt wird äquivalent zu der Topologie, die von der Familie von Halbnormen $\{p_{K,L} \mid K \subset X \text{ kompakt}, L \in \mathcal{L}\}$ erzeugt wird.

g) $C(X,V)$ ist vollständig.

h) Man hat eine kanonische injektive K-lineare Abbildung $\Theta : C(X,K) \otimes_K V \to C(X,V)$.

i) $C(X,K) \otimes_K V$ liegt dicht in $C(X,V)$ unter Θ.

j) Ist K sphärisch vollständig, so stimmt die Topologie, die auf $C(X,K) \otimes V$ unter Θ induziert wird, überein mit der projektiven Tensorprodukttopologie, d.h. man erhält eine Identifizierung $C(X,K)\widehat{\otimes}_{K,\pi} V \cong C(X,V)$.

k) Ist K sphärisch vollständig und Y ein weiterer kompakter Raum, so hat man kanonische Isomorphismen

$$C(X,K)\widehat{\otimes}_{K,\pi} C(Y,V) \cong C(X, C(Y,V)) \cong C(X \times Y, V).$$

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 21. Mai 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.