Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 3 7. Mai 2013

K bezeichnet einen nicht-archimedischen vollständigen Körper.

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Seien V, W K-Banachräume, $U \subset V$ offen, $f : U \to W$ eine strikt differenzierbare Abbildung im Punkt $v_0 \in U$ sowie $D_{v_0} f : V \to W$ ein Homöomorphismus. Wiederholen/Zeigen Sie: Es existieren offene Umgebungen $v_0 \in U_0 \subset U$ und $f(v_0) \in U_1 \subset W$, sodass $f : U_0 \xrightarrow{\sim} U_1$, und sodass die Umkehrabbildung $g : U_1 \to U_0$ strikt differenzierbar in $f(v_0)$ ist mit $D_{f(v_0)} g = (D_{v_0} f)^{-1}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $X = Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ mit der Unterraumtopologie induziert von $M_n(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}^{n^2}$. Sei $\mathcal{A} = \{(X \cap p^{-i} M_n(\mathbb{Q}_p), \varphi_i) |\ i \in \mathbb{N}\}$, wobei $\varphi_i(x) = p^i x$. Sei weiterhin $U = \mathrm{Id} + pM_n(\mathbb{Z}_p)$, $\phi : U \to pM_n(\mathbb{Z}_p)$, $u \mapsto u - \mathrm{Id}$ und $\mathcal{B} = \{(hU, \varphi_h) |\ h \in X\}$, wobei $\varphi_h(x) = \phi(h^{-1}x)$. Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalente Atlanten auf X

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum, der hausdorffsch und lokal kompakt (d.h. jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung) ist sowie eine abzählbarer Basis der Topologie besitzt. Zeigen Sie: X ist parakompakt.

Aufgabe 4. *(5 Punkte)*

a) Seien V_1, V_2, W_1, W_2 lokal-konvexe Vektorräume über K, $f : V_1 \to V_2$ und $g : W_1 \to W_2$ stetige lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann die Abbildungen $f \otimes g : V_1 \otimes_{K,*} W_1 \to V_2 \otimes_{K,*} W_2$ für $* \in \{\iota, \pi\}$, stetig sind.

b) Seien $V = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} V_n$ und $W = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} W_n$ induktive Limiten lokal-konvexer Vektorräume über K, versehen mit der eindeutigen feinsten lokal-konvexen Topologie, sodass alle kanonischen Abbildungen $V_i \to V$ (bzw. $W_i \to W$) stetig sind. Zeigen Sie: $\varinjlim_n (V_n \otimes_{K,\iota} W_n) \cong V \otimes_{K,\iota} W$.
Bonus: Wie sieht die analoge Eigenschaft für projektive Limiten und $\otimes_{K,\pi}$ aus, gemäss dem Fall, dass das algebraische Tensorprodukt mit dem Limes kommutiert?

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 14. Mai 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.