Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 2 30. April 2013

Aufgabe 1. *(12 Punkte)*
Sei K ein nicht-archimedischer vollständiger Körper, V, W normierte K-Vektorräume, $U \subset V$ offen und $f : U \to W$ eine Abbildung. f heisst **strikt differenzierbar** in $v_0 \in U$, falls eine stetige lineare Abbildung $D_{v_0}f : V \to W$ existiert, sodass für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung $U_\varepsilon(v_0) \subset U$ existiert mit

$$\|f(v_1) - f(v_2) - D_{v_0}f(v_1 - v_2)\| \leq \varepsilon \cdot \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in U_\varepsilon(v_0).$$

Zunächst bemerken wir, dass man bei (strikt) differenzierbaren Funktionen wie in der reellen Situation Ketten- und Produktregeln sowie lokale Umkehrsätze hat. Zeigen Sie:

a) Ist f strikt differenzierbar in U, so ist die Abbildung $U \to \mathcal{L}(V, W) = \{g : V \to W |\ g \text{ linear, stetig}\},\ v \mapsto D_v f$, stetig.

Sei von nun an $V = K^n$. Für $1 \leq i \leq n$ und $v_0 = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ kann man die Abbildung $f_i : U_i \to W,\ a \mapsto f((a_1, \dots, a, \dots, a_n))$ mit $U_i \subset K$ sowie die partielle Ableitung $D^{(i)}_{v_0} f := D_{a_i} f_i$ betrachten, sofern sie existiert. Sei weiterhin $\underline{i} = (0, \dots, 1, \dots 0)$ der Multiindex mit 1 an der i-ten Stelle. Sei $F(X) = \sum_\alpha v_\alpha X^\alpha \in \mathcal{F}^n_\varepsilon(W)$. Für $1 \leq i \leq n$ ist die partielle Ableitung von F definiert als

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(X) := \sum_\alpha X^{\alpha - \underline{i}} \alpha_i v_\alpha.$$

Zeigen Sie:

b) $\frac{\partial F}{\partial X_i}(X) \in \mathcal{F}^n_\varepsilon(W)$.

c) $f := \widetilde{F}$ ist strikt differenzierbar, und für $v \in B_\varepsilon(0)$ gilt $D^{(i)}_v f(1) = (\partial F / \partial X_i F)^\sim(v)$

d) Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so gilt $F(X) = \sum_\alpha X^\alpha \frac{1}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \widetilde{f} \right)(0)$, wobei $(\partial / \partial x_i)\widetilde{f} : B_\varepsilon(0) \to W,\ x \mapsto D^{(i)}_x \widetilde{f}(1)$.

Mit der Taylor-Entwicklung folgt auch ein Identitätssatz für Potenzreihen: Ist $F \neq 0$, so existiert ein $v \in B_\varepsilon(0)$ mit $\widetilde{F}(v) \neq 0$.
Sei jetzt $U \subset K^n$ offen und f lokal analytisch. Zeigen Sie:

e) f ist strikt differenzierbar in jedem Punkt $v_0 \in U$.

f) Die Abbildung $U \to \mathcal{L}(K^n, W),\ v \mapsto D_v f$, ist lokal analytisch.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U \times V, \varphi \times \psi, K^{n+m}) |\ (U, \varphi, K^n) \in \mathcal{A}, (V, \psi, K^m) \in \mathcal{B}\}$$

ist ein Atlas für $M \times N$, versehen mit der Produkttopologie.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 7. Mai 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.