Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 1 23. April 2013

Alle auftretenden Vektorräume $(V, W, \ldots)$ sind lokal-konvexe Vektorräume über einem nicht-archimedischen, vollständigen Körper K mit Norm $|\ |$ und Bewertungsring $\mathcal{O}$.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $g(X) = X^p - X \in \mathcal{F}_1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p)$ und $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} Y^n \in \mathcal{F}_{\frac{1}{p}}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p)$. Zeigen Sie: $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ ist eine wohldefinierte Abbildung $B_1(0) \to \mathbb{Q}_p$, aber $f \circ g$ existiert nicht als Element in $\mathcal{F}_1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) K ist sphärisch vollständig genau dann, wenn K c-kompakt ist.

b) Sei $f : V \to W$ eine kompakte Abbildung und $B \subset V$ ein beschränkter $\mathcal{O}$-Untermodul. Dann ist $\overline{f(B)}$ beschränkt und c-kompakt in W.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $g : V \to W$ eine kompakte Abbildung. Zeigen Sie:

a) Falls $h : V_1 \to V$ und $f : W \to W_1$ stetige lineare Abbildung sind, so ist $f \circ g \circ h : V_1 \to W_1$ kompakt.

b) Ist $g(V) \subset W'$ für einen abgeschlossenen Unterraum $W' \subset W$, so ist $g : V \to W'$ kompakt.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein induktives System von Vektorräumen mit injektiven kompakten Übergangsabbildungen $\iota_n : V_n \to V_{n+1}$ für alle n und kanonischen Abbildungen $j_m : V_m \to \varinjlim_n V_n$ für alle m. Zeigen Sie: Ist $B \subset \varinjlim_n V_n$ beschränkt, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und eine beschränkte Menge $B_m \subset V_m$ mit $j_m(B_m) = B$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 30. April 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.