Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 12 6. Juli 2012

Sei L eine (endlich-dimensionale) Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 sowie M ein endlich-dimensionaler L-Modul.

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Sei c_M der Casimir-Operator, mit der Notation aus Erinnerung 10 der Vorlesung (insbesondere: $m = \dim_k(M),\ r = \dim(H)$). Zeigen Sie:

a) $c_M = r/m \cdot \mathrm{Id}$ in $\mathrm{End}_k(M)$.

b) Sei $L = \mathfrak{sl}_2(K)$ mit Standardbasis x, y, h sowie $M = K^2$ der kanonische L-Modul. Dann ist $c_M = 2xy - h + h^2/2$

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) L ist halbeinfach,

b) $H^1(L, M) = 0$ für alle L-Moduln M,

c) Jeder L-Modul ist vollständig reduzibel.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei L eine reelle Lie-Algebra, $\kappa : L \times L \to \mathbb{R}$ eine invariante Bilinearform (vgl. Übungsblatt 4) und $\Gamma(\kappa)(x, y, z) = \kappa([x, y], z)$. Zeigen Sie

a) Ist κ schiefsymmetrisch, so gilt $\Gamma(\kappa) = 0$,

b) Ist κ symmetrisch, so ist $\Gamma(\kappa) \in Z^3(L, \mathbb{R})$ ein 3-Zykel.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei M ein L-Modul über $\mathbb{R}$ sowie $M_{\mathbb{C}}$ der assoziierte $L_{\mathbb{C}}$-Modul. Zeigen Sie: $H^p(L, M)_{\mathbb{C}} \cong H^p(L_{\mathbb{C}}, M_{\mathbb{C}})$ als $\mathbb{C}$-Vektorräume für alle $p \geq 0$.