Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 11 29. Juni 2012

Sei L eine (endlich-dimensionale) Lie-Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 sowie M ein L-Modul. Wir verwenden die gängige Notation $C^*(L, M) = \mathrm{Hom}_L(V_*(L), M)$.

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, dass $d^2 = 0$ für das Differential d des Chevalley-Eilenberg-Komplexes $V_*(L)$ gilt, d.h. dieser ist in der Tat ein Komplex.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei L von Dimension n als K-Vektorraum und $\bigwedge^n L \cong K$ ein L-Modul via

$$y.x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{i=1}^{n} x_1 \wedge \ldots \wedge [y, x_i] \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Zeigen Sie, dass $H^n(L, \bigwedge^n L) \cong K$.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*

Sei $L = \mathfrak{sl}_2$. Zeigen Sie unter Verwendung des Chevalley-Eilenberg-Komplexes, dass $H_3(L, K) \cong H^3(L, K) \cong K$ gilt für den *trivialen* L-Modul K.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Sei L abelsch und M ein trivialer L-Modul. Zeigen Sie: $H^n(L, M) = C^n(L, M)$ für alle n.

b) Sei $L = K$ eindimensional und M ein L-Modul. Zeigen Sie: $C^0(L, M) = M$, $C^1(L, M) \cong M$ und $C^n(L, M) = 0$ sonst.

c) Sei $L = K^2$ zweidimemsional und abelsch sowie M ein L-Modul. Zeigen Sie: $C^1(L, M) \cong M^2$, $C^2(L, M) \cong M$ und bestimmen Sie explizit $H^2(L, M)$.