Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 10 22. Juni 2012

Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Es gelten die Notationen aus der Vorlesung: $H \subset L$ ist eine Cartan-Unteralgebra, $\Phi \subset H^*$ ein Wurzelsystem, Φ^+ positive Wurzeln, $\{h_1, \ldots, h_l\} \subset H$ eine Basis von H, $\{k_1, \ldots, k_l\} \subset H$ eine duale Basis bzgl. der Killing-Form κ. Man wählt $x_\alpha \in L_\alpha$ und $z_\alpha \in L_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, z_\alpha) = 1$ für $\alpha \in \Phi$. Zu $\lambda \in H^*$ kann man den Standard zyklischen Modul $Z(\lambda)(= V^\lambda$ aus Theorem 7) mit höchstem Gewicht λ betrachten.

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*

Das Casimir-Element wurde definiert als

$$c_L = \sum_{i=1}^{l} h_i k_i + \sum_{\alpha \in \Phi^+} x_\alpha z_\alpha \in \mathcal{U}(L).$$

Zeigen Sie:

a) $c_L \in Z(\mathcal{U}(L))$.

b) Es existiert ein Algebrenhomomorphismus $\chi_\lambda : Z(\mathcal{U}(L)) \to \mathbb{C}$, durch den jedes Element aus dem Zentrum von $\mathcal{U}(L)$ auf $Z(\lambda)$ operiert.

c) $(\lambda, \lambda) = \sum_{i=1}^{l} \lambda(h_i)\lambda(k_i)$.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*

Wir erinnern an die Menge $\mathfrak{X}$ aller Funktionen $f : H^* \to \mathbb{C}$, deren Träger (Support) in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $\{\lambda - \sum_{\alpha \succ 0} k_\alpha \alpha, k_\alpha \in \mathbb{Z}^+\}, \lambda \in H^*$, enthalten ist. Wir haben "Basisfunktionen" $e_\lambda = \{\lambda \mapsto 1, \mu \mapsto 0, \mu \neq \lambda\}$ für jedes $\lambda \in H^*$ und eine Konvolution $*$ für $\mathfrak{X}$ definiert. Für $\lambda \in H^*$ sei $p(\lambda)$ die Anzahl der Mengen von nicht-negativen ganzen Zahlen $\{k_\alpha, \alpha \succ 0\}$, sodass $-\lambda = \sum_{\alpha \succ} k_\alpha \alpha$. Sei ausserdem $f_\alpha \in \mathfrak{X}, \alpha \in \Phi^+$, definiert durch $f_\alpha(-k\alpha) = 1, k \in \mathbb{Z}^+, f_\alpha(\mu) = 0$ sonst. Die Elemente $q = \prod_{\alpha \succ 0}(e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2}), \delta = \sum_{\alpha \succ 0} \frac{1}{2}\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}\Lambda]$ ebenso wie $\mathrm{ch}(Z(\lambda))$ fassen wir als Elemente in $\mathfrak{X}$ auf. Zeigen Sie:

a) $p(\mu - \lambda) = \dim Z(\lambda)_\mu$, d.h. insbesondere folgt $p \in \mathfrak{X}$ (betrachten Sie mit PBW eine Basis von $Z(\lambda)_\mu$).

b) $p = \prod_{\alpha \succ 0} f_\alpha$.

c) $(e_0 - e_{-\alpha}) * f_\alpha = e_0$.

d) $q = e_\delta * \prod_{\alpha \succ 0}(e_0 - e_{-\alpha})$.

e) $\sigma q = \mathrm{sgn}(\sigma) q$ (s_α permutiert (bis auf α) die positiven Wurzeln).

f) $q * p * e_{-\delta} = e_0$.

g) $p(\mu - \lambda) = p * e_\lambda(\mu)$.

h) $q * \mathrm{ch}(Z(\lambda)) = e_{\lambda+\delta}$
