Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 9 15. Juni 2012

Aufgabe 1. *(16 Punkte)*
Sei $L = \mathfrak{sl}_2(K)$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 mit Standardbasis x, y, h und V eine beliebige Darstellung von L. Wir wollen uns mit der Endlichdimensionalität der in der Vorlesung konstruierten Moduln V^ω ($\omega \in H^*$) bzgl. L befassen.

a) Beschreiben Sie, wie man den Untermodul V', der die Summe der Gewichtsräume ist, als $\bigoplus_{\lambda \in K} V_\lambda$ auffassen kann.

b) Zeigen Sie in dem Fall, dass V endlich-dimensional ist, dass nach geeigneter Festlegung eines Wurzelsystems für L ein Vektor $0 \neq v \in V$ ein primitives Element ist genau dann, wenn ein $\lambda \in K$ existiert mit $v \in V_\lambda$ und $V_{\lambda+2} = 0$.

c) Sei $\lambda \in K$ und $Z(\lambda)$ der unendlich-dimensionale Vektorraum mit (abzählbarer) Basis $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$. Wir erinnern an die Formeln ($i \in \mathbb{N}_0, v_{-1} := 0$):

$$h.v_i = (\lambda - 2i)v_i, \quad y.v_i = (i+1)v_{i+1}, \quad x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Formeln aus (1) eine L-Modulstruktur auf $Z(\lambda)$ definieren, und dass jeder nicht-triviale L-Untermodul von $Z(\lambda)$ wenigstens einen primitiven Vektor enthält.

d) Sei $\lambda + 1 = i$ eine nicht-negative ganze Zahl. Zeigen Sie, dass v_i ein primitiver Vektor ist. Zeigen Sie, dass man einen L-Modulhomomorphismus $\phi : Z(\mu) \to Z(\lambda)$, $\mu = \lambda - 2i$, induziert durch $v_0 \mapsto v_i$, hat. ϕ ist injektiv, und sowohl $\phi(Z(\mu))$ als auch $Z(\lambda)/\phi(Z(\mu))$ sind irreduzible L-Moduln. $Z(\lambda)$ ist nicht vollständig reduzibel, wenn $i > 0$.

e) Sei $\lambda + 1$ *keine* nicht-negative ganze Zahl. Zeigen Sie, dass $Z(\lambda)$ irreduzibel ist.

f) Zeigen Sie, dass der Modul $V^\lambda = \mathcal{U}(L) \otimes_{\mathcal{U}(B)} W^\lambda$ aus der Vorlesung isomorph zu $Z(\lambda)$ ist. Folgern Sie damit, dass $\dim E^\lambda = \dim V^\lambda / N^\lambda < \infty$ genau dann, wenn λ eine nicht-negative ganze Zahl ist.

g) Sei nun $L = A_l$ oder $L = C_l$. Beschreiben Sie nochmal so explizit wie möglich die Fundamentalgewichte und primitiven Vektoren bezüglich der natürlichen Darstellung auf $V = \mathbb{C}^{l+1}$ bzw. $V = \mathbb{C}^{2l}$.