Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 8 8. Juni 2012

Wir arbeiten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0.

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Sei V eine (nicht notwendigerweise endlich-dimensionale Darstellungen) einer endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra L. Zeigen Sie zunächst, dass die Summe der Gewichtsräume V_w, $w \in H^*$, direkt ist. Sei jetzt V für den folgenden Teil irreduzibel. Zeigen Sie:

a) Hat V mindestens einem nicht-trivialen Gewichtsraum, so ist V die direkte Summe seiner Gewichtsräume.

b) V hat einen nicht-trivialen Gewichtsraum genau dann, wenn $\mathcal{U}(H).v$ endlich-dimensional für alle $v \in V$ ist.

c) Sei $h \in H$ und $U \subset \mathcal{U}(H)$ die Unteralgebra, die von 1 und h erzeugt wird. V hat einen nicht-trivialen Gewichtsraum genau dann, wenn $U.v$ endlich-dimensional für alle $v \in V$ ist.

d) Sei R ein (assoziativer) Ring mit Eins. Jede Nichteinheit $x \in R$ ist in einem maximalen Linksideal enthalten. R/I ist ein einfacher R-Modul, d.h. es existieren keine nicht-trivialen Untermoduln.

e) Sei nun $L = \mathfrak{sl}_2(K)$ mit Standardbasis (x, y, h). $x - 1$ ist nicht invertierbar in $\mathcal{U}(L)$, enthalten in einem maximalen Linksideal I und $V = \mathcal{U}(L)/I$ ist ein irreduzibler L-Modul.

f) Man hat $(x-1)^r h^s \equiv 0 \mod I$ falls $r > s$ bzw. $(x-1)^r h^r \equiv (-2)^r r! \mod I$.

g) Die Vektoren $1, h, h^2, \ldots, \in V$ sind linear unabhängig, d.h. V besitzt keinen nicht-trivialen Gewichtsraum.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Sei E ein (endlich-dimensionaler) Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $(-,-)$ und Φ ein reduziertes Wurzelsystem in E. Für $\alpha, \beta \in E$ setzen wir $\langle \beta, \alpha \rangle := 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$. Eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit Wurzelsystemen spielt die **Weyl-Gruppe** $\mathcal{W}$ von Φ, die als die Untergruppe von $\mathrm{GL}(E)$ definiert ist, die von den Spiegelungen s_α, $\alpha \in \Phi$, erzeugt wird. Ein Automorphismus von Φ ist ein Vektorraumautomorphismus ϕ von E mit $\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$. Für $\alpha \in \Phi$ definiert man $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{W}$ ist endlich.

b) $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in \Phi\}$ ist ein Wurzelsystem in E, dessen Weyl-Gruppe kanonisch isomorph zu $\mathcal{W}$ ist. Man hat $\langle \alpha^\vee, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$.

c) $\mathcal{W}$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}\Phi$.

Hinweis: Humphreys, Lemma 9.2.