**Universität Heidelberg**
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

# Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

**Aufgabenblatt 7** 1. Juni 2012

Es gelten die üblichen Voraussetzungen: $K$ ist ein Körper der Charakteristik 0, alle Lie-Algebren bzw. Darstellungen werden als endlich-dimensional vorausgesetzt.

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)*
Wir wollen einen anderen Beweis für die Existenz der freien Lie-Algebra über einer Menge $X$ geben. Bilden Sie dazu den von $X$ erzeugbaren Vektorraum $V$ und betrachten Sie die Lie-Unteralgebra $L$ der Tensoralgebra $T(V)$, die von $V = T^1(V)$ erzeugt wird. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt, dass $L$ die universelle Abbildungseigenschaft der freien Lie-Algebra über $X$ erfüllt.

**Aufgabe 2.** *(4 Punkte)*
Sei $L$ eine der klassischen halbeinfachen Lie-Algebren $A_l = \mathfrak{sl}_{l+1}(K), C_l = \mathfrak{sp}_{2l}(K), B_l = \mathfrak{o}_{2l+1}(K)$, $D_{l,(l\geq 2)} = \mathfrak{o}_{2l}(K)$. Zeigen Sie, dass die Menge der Diagonalmatrizen in $L$ eine maximal torale Unteralgebra bildet.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 die Wurzeln und die Wurzelräume für die Lie-Algebren $A_l$ und $C_l$.

**Aufgabe 4.** *(4 Punkte)*
Sei $L$ halbeinfach und $H$ eine maximal torale Unteralgebra von $L$.

a) Der Normalisator von $H$ in $L$ ist definiert als $N_L(H) = \{x \in L| \ [xH] \subset H\}$. Zeigen Sie, dass $H = N_L(H)$.

b) Sei $L = \mathfrak{sl}_2(K)$. Zeigen Sie, dass $H$ eindimensional ist.