Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 6 25. Mai 2012

Es gelten die üblichen Voraussetzungen: K ist ein Körper der Charakteristik 0, alle Lie-Algebren bzw. Darstellungen werden als endlich-dimensional vorausgesetzt.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra über K, die sich als direkte Summe $L = M \oplus N$ zweier Lie-Algebren M, N schreiben lässt. Zeigen Sie, dass man einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(M) \otimes_K \mathcal{U}(N)$ hat.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra über K, $I \subset L$ ein Ideal sowie $\pi : L \to L/I$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie: Die induzierte Abbildung $\widetilde{\pi} : \mathcal{U}(L) \to \mathcal{U}(L/I)$ ist surjektiv und $\mathrm{Ker}(\widetilde{\pi})$ ist das Ideal, das von dem Bild von $I \hookrightarrow L \to \mathcal{U}(L)$ erzeugt wird.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $TV = \bigoplus_{n\geq 0} T^n V$ die Tensoralgebra von V mit kanonischer Inklusion $\iota : V \to TV$. Sei ausserdem I das Ideal in TV, das von $u \otimes v - v \otimes u$, $u, v \in T^1 V = V$ erzeugt wird. Überprüfen Sie explizit die universellen Abbildungseigenschaften für TV bzw. TV/I: Ist A eine (für TV/I: zusätzlich kommutative) assoziative K-Algebra mit Eins und $f : V \to A$ eine lineare Abbildung, so existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus von (für TV/I: zusätzlich kommutativen) assoziativen Algebren mit Eins $g : TV \to A$ (bzw. $g : TV/I \to A$), sodass $f = g \circ \iota$.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)*
Sei L die nicht-abelsche Lie-Algebra von Dimension 2 über K. Zeigen Sie direkt (ohne PBW), dass $\iota : L \to \mathcal{U}(L)$ injektiv ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/lie2`
Abgabe bis spätestens 1. Juni 2012 vor der Vorlesung, bei den Kästen an Hörsaal 2.