Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 5 18. Mai 2012

Es gelten die üblichen Voraussetzungen: K ist ein Körper der Charakteristik 0, alle Lie-Algebren bzw. Darstellungen werden als endlich-dimensional vorausgesetzt.

Aufgabe 1. *(8 Punkte)*
Sei K algebraisch abgeschlossen und L eine Lie-Algebra über K. Man kann das **nilpotente Radikal** $\mathfrak{n}$ von L definieren als Durchschnitt der Kerne *aller* irreduzibler (endlich-dimensionalen) Darstellungen σ von L. Sei $\sigma : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine solche Darstellung.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathrm{Rad}(L) \cap [L, L]) = \{0\}$, d.h. insbesondere $\mathrm{Rad}(L) \cap [L, L] \subset \mathfrak{n}$. Wenden Sie dazu das Lemma von Schur auf die höheren derivierten Lie-Algebren von $\mathrm{Rad}(L)$ an (hier benötigen wir algebraisch abgeschlossen).

b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal von L ist. Betrachten Sie dazu die adjungierte Darstellung von L und verfahren Sie induktiv, indem Sie Unter- bzw. Quotientenmoduln von L betrachten.

c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{n} = \mathrm{Rad}(L) \cap [L, L]$.

d) Zeigen Sie mit dem Satz von Levi, dass $\mathfrak{n} = [L, \mathrm{Rad}(L)]$.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra über K. Zeigen Sie, dass man eine Sequenz von Idealen

$$\{0\} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_n = L$$

in L hat, sodass L_i/L_{i-1} entweder eindimensional oder einfach ist. Eine solche Sequenz nennt man **Jordan-Hölder**-Reihe von L. Zeigen Sie ausserdem, dass die Menge der Quotienten $\{L_i/L_{i-1} : i = 1, \ldots, k\}$ nicht von der speziellen Jordan-Hölder-Reihe abhängt.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Wir wissen, dass $\mathfrak{sl}(V) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfach ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rad}(L) = Z(L) \cong K$ und dass $\mathfrak{sl}(V)$ ein Levi-Komplement von $\mathfrak{gl}(V)$ ist.