Universität Heidelberg Prof. Dr. Otmar Venjakob
Mathematisches Institut Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 4 11. Mai 2012

Wir halten uns an die Notation der Vorlesung ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Alle auftauchenden Objekte werden als endlich-dimensional (im jeweiligen Sinne) vorausgesetzt.

Aufgabe 1. *(12 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra. Eine symmetrische Bilinearform $\kappa : L \times L \to K$ heisst **invariant**, wenn $\kappa([x,y],z) = \kappa(x,[y,z])$ für alle $x,y,z \in L$ gilt. Zeigen Sie:

a) Ist $\pi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von L, so ist die Form $\kappa_\pi(x,y) = \mathrm{tr}(\pi(x),\pi(y))$ invariant. Insbesondere ist die Killing-Form $\kappa_L = \kappa_{\mathrm{ad}}$ invariant.

b) Das **Radikal** einer invarianten symmetrischen Bilinearform κ auf L ist definiert als $\mathrm{Rad}(\kappa) = \{x \in L \mid \kappa(x,L) = \{0\}\}$. $\mathrm{Rad}(\kappa)$ ist ein Ideal.

c) Man hat eine Inklusion $\mathrm{Rad}(\kappa_L) \subset \mathrm{Rad}(L)$. Überprüfen Sie anhand des Beispiels von Aufgabe 3, Blatt 1, dass die umgekehrte Inklusion im allgemeinen nicht gelten muss.

d) Sei L eine reelle Lie-Algebra. Dann gilt $\mathrm{Rad}(\kappa_{L_\mathbb{C}}) = \mathrm{Rad}(\kappa_L)_\mathbb{C}$.

e) Ist I ein nilpotentes Ideal von L, so ist I orthogonal zu L bzgl. der Killing-Form. (d.h. $\kappa_L(I,L) = \{0\}$).

f) Das orthogonale Komplement von $[L,L]$ bzgl. der Killing-Form ist $\mathrm{Rad}(L)$.

g) Sei L die zweidimensionale nicht-abelsche Lie-Algebra, von der wir wissen, dass sie auflösbar ist. L hat eine nicht-triviale Killing-Form.

h) Sei $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Berechnen Sie die Matrixgestalt der Killing-Form bzgl. der Standardbasis x, y, h. Berechnen Sie die duale Basis relativ zur Killing-Form.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei L halbeinfach. Zeigen Sie: $\mathrm{ad}(L) = \mathrm{Der}(L)$.
Hinweis: Zeigen Sie $[\mathrm{Der}(L), \mathrm{ad}(L)] \subset \mathrm{ad}(L)$ und benutzen Sie die Killing-Form, um das orthogonale Komplement von $\mathrm{ad}(L)$ in $\mathrm{Der}(L)$ zu bestimmen.