Universität Heidelberg Prof. Dr. Otmar Venjakob
Mathematisches Institut Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 3 4. Mai 2012

Wir halten uns an die Notation der Vorlesung ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Alle auftauchenden Objekte werden als endlich-dimensional (im jeweiligen Sinne) vorausgesetzt.

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*

Seien $\mathbb{H}$ die Quaternionen, die man in Matrizenform als $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) |\ a, b \in \mathbb{C} \right\}$ mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation darstellen kann. Seien $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ die invertierbaren Elemente im Ring $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$. Zeigen Sie: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H}|\ \det_{\mathbb{C}}(A) \neq 0\}$, wobei $\det_{\mathbb{C}} : M_{2n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die gewöhnliche Determinante ist.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass für $(x, y) \in \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(W)$ äquivalent sind:

a) $e^{ty}\beta(v, v') = \beta(e^{tx}v, e^{tx}v')$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $v, v' \in V$,

b) $y\beta(v, v') = \beta(xv, v') + \beta(v, xv')$ für alle $v, v' \in V$.

Folgern Sie damit, dass die Lie-Gruppe

$$\mathrm{Aut}(V, \beta) = \big\{g \in \mathrm{GL}(V)|\ \beta(gv, gv') = \beta(v, v')\ \forall\ v, v' \in V\big\}$$

die Lie-Algebra

$$L(\mathrm{Aut}(V, \beta)) = \{x \in \mathfrak{gl}(V)|\ \beta(xv, v') + \beta(v, xv') = 0\ \forall\ v, v' \in V\}$$

hat. Bestimmen Sie damit die Lie-Algebren zu $\mathrm{O}_n(\mathbb{K}), \mathrm{O}_{p,q}(\mathbb{K}), \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K}), \mathrm{U}_{p,q}(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Seien L, L' Lie-Algebren und $\alpha : L' \to \mathrm{Der}(L)$ ein Lie-Algebrenhomomorphismus. Wir definieren die **semidirekte Summe** $L \rtimes_D L'$ von L, L' als $L \oplus L'$ (als Vektorräume), wobei die Lieklammer durch

$$[(x, x'), (y, y')] := (\alpha(x')y - \alpha(y')x + [x, y], [x', y'])$$

bestimmt sei. Zeigen Sie: Ist M eine Lie-Algebra, $L \subset M$ ein Ideal und $L' \subset M$ eine Unteralgebra mit $M = L + L'$, $L \cap L' = \{0\}$, so ist $D : L' \to \mathrm{Der}(L),\ D(x) = \mathrm{ad}x|_L$ ein Lie-Algebrenhomomorphismus, und die Abbildung $f : L \rtimes_D L' \to M,\ (x, y) \mapsto x + y$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Wir betrachten $L = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \otimes \mathbb{C}e_2$ als abelsche Lie-Algebra über $\mathbb{C}$, ausgestattet mit der Derivation $D'(e_1) = 2e_1, D'(e_2) = ie_2$. Sei $M = L \rtimes_D \mathbb{C}$, wobei $D : \mathbb{C} \to \mathrm{Der}(L),\ t \mapsto tD'$. Zeigen Sie, dass M keine reelle Form hat.

Hinweis: Angenommen, $M = N \oplus iN$ für eine reelle Lie-Algebra N, und sei σ die entsprechende komplexe Konjugation (d.h. die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $(n, in') \mapsto (n, -in')$). Zeigen Sie, dass σ eine Involution auf V induziert und dass diese die die D-Eigenräume permutiert. Folgern Sie, indem Sie $\sigma(0, 1)$ betrachten, einen Widerspruch.
