Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Darstellungen von Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt 2 27. April 2012

Sei K ein Körper und L eine Lie-Algebra über K. Generell werden alle auftauchenden Lie-Algebren als endlich-dimensional vorausgesetzt.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Seien V, W L-Moduln. Prüfen Sie, dass folgende K-Vektorräume mit den angegebenen Operationen L-Moduln sind:

a) $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ mit $(x.f)(v) = -f(x.v)$ für $f \in V^*, v \in V, x \in L$,

b) $V \otimes_K W$ mit $x.(v \otimes w) = x.v \otimes w + v \otimes x.w$ für $v \in V, w \in W, x \in L$,

c) $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$ für $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W), v \in V, x \in L$.

Verifizieren Sie folgenden Isomorphismus von L-Moduln: $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei V ein L-Modul. Zeigen Sie, dass V direkte Summe irreduzibler L-Moduln ist genau dann, wenn jeder L-Untermodul von V ein Komplement besitzt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Sei $L = \mathfrak{sl}_2(K)$, $W_1 = K \oplus K$, aufgefasst als L-Modul mit der natürlichen Matrizenmultiplikation und $V = K[X, Y]$. Man kann den Vektorraum $\mathrm{Sym}^k(V)$, erzeugt von den homogenen Polynomen vom Grad k, mit der k-ten symmetrischen Potenz $S^k W_1$ identifizieren. Hierbei operieren die Standarderzeuger $x, y, h \in L$ via

$$x.f(X,Y) = X\frac{\partial}{\partial Y}f(X,Y), \quad y.f(X,Y) = Y\frac{\partial}{\partial X}f(X,Y), \quad h.f(X,Y) = X\frac{\partial}{\partial X}f(X,Y) - Y\frac{\partial}{\partial Y}f(X,Y).$$

Zeigen Sie, dass man eine Isomorphie $W_n = \mathrm{Sym}^k(V)$ hat.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Sei K algebraisch abgeschlossen der Charakteristik 0 und $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung. Zeigen Sie:

a) Ist L auflösbar, so ist $\varphi|_{[L,L]}$ eine nilpotente Darstellung, d.h. $\varphi([L, L])^n = 0$ für n gross genug.

b) L ist auflösbar genau dann, wenn $[L, L]$ nilpotent ist.
