Universität Heidelberg Prof. Dr. Otmar Venjakob
Mathematisches Institut Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 12 20. Januar 2012

Wie üblich arbeiten wir mit Lie-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0.

Aufgabe 1. *(16 Punkte)*
Wir wollen zeigen, dass für eine beliebige Lie-Algebra L der Schnitt zweier BUA B_1, B_2 eine CUA enthält. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Reduzieren Sie (analog zur Vorlesung) auf den Fall einer halbeinfachen Lie-Algebra. Dies nehmen wir in den folgenden Schritten an.

b) Zeigen Sie, dass eine auflösbare Unteralgebra B von L, die eine CUA H enthält, von der Form $B = H \oplus [B, B]$ ist, und dass $[B, B]$ mit der Menge der ad-nilpotenten Elemente von L in B übereinstimmt. Benutzen Sie dafür eine Wurzelraumzerlegung von B bzgl. H.

c) Zeigen Sie, dass eine Unteralgebra B von L eine BUA ist genau dann, wenn $[B, B] = B^{\perp}$. Benutzen Sie dafür Cartans Kriterium und Lies Theorem.

d) Seien nun H_1, H_2 CUA von B_1, B_2 resp. (warum existieren diese?) und $N_i = [B_i, B_i]$. Zeigen Sie, dass $B_1 \subset N_1 + B_2$ und damit $B_1 = N_1 + (B_1 \cap B_2)$.

e) Finden Sie Elemente $z \in H_1$, $n \in N_1$ und $w \in B_1 \cap B_2$ mit $H_1 = L_0(adz)$ sowie $w = z + n$. Sei $r_i = \dim H_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der Elemente z, n, w, dass $r_1 = r_2$. Folgern Sie, dass jede CUA von L Dimension r_i haben muss (dieses ist übrigens der Rang von L, definiert wie auf dem letzten Blatt). Finden Sie schliesslich eine CUA, die zu w gehört, die in $B_1 \cap B_2$ enthalten ist.