Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 11 13. Januar 2012

Wie üblich arbeiten wir mit Liealgebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $L \neq 0$ eine Liealgebra der Dimension n. Zu $x \in L$ kann man das charakteristische Polynom $P_x(T) = \det(T - \mathrm{ad}\ x) = \sum_{i=0}^n a_i(x)T^i$ betrachten. Der **Rang** von L ist die kleinste Zahl e, sodass a_e nicht identisch Null ist. $x \in L$ heisst **regulär**, wenn $a_e(x) = 0$ (man kann zeigen, dass dieser Begriff von Regularität dem aus der Vorlesung entspricht, wenn L halbeinfach ist). Zeigen Sie: Man hat $1 \leq e \leq n$, es gilt $e = n$ genau dann, wenn L nilpotent ist und L besitzt unendlich viele reguläre Elemente.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei L eine halbeinfache Liealgebra.

a) Sei $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ die Zerlegung von L in einfache Ideale. Zeigen Sie, dass die halbeinfachen und nilpotenten Teile von $x \in L$ die Summe der halbeinfachen und nilpotenten Teile der Komponenten von x in L_i sind.

b) Sei L' eine halbeinfache Lieunteralgebra von L und $x \in L'$. Zeigen Sie, dass die Jordanzerlegung von x in L' schon die Jordanzerlegung in L ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei L eine halbeinfach Liealgebra und L' eine halbeinfache Lieunteralgebra. Zeigen Sie, dass jede CUA von L' in einer CUA von L liegt.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei L eine Liealgebra. Zeigen Sie: $\#\mathcal{E}(L) = 1$ genau dann, wenn L nilpotent ist.