Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 10 16. Dezember 2011

Wie in der Vorlesung arbeiten wir mit einem Euklidischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum E.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass jedes irreduzible Wurzelsystem isomorph zu seinem dualen ist, ausser im Fall $B_l = (C_l)^*$ für $l \geq 3$.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis Δ und $\mathcal{E} = \{\pi \in S(\Delta) | \ \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \pi(\alpha), \pi(\beta) \rangle\}$, d.h. die Gruppe aller Permutationen von Δ, die die Cartan-Matrix invariant lassen. Zeigen Sie folgende Isomorphien für $\mathcal{E}$:

a) $\mathcal{E} = \{1\}$ für $\Phi = A_1, B_l, C_l, G_2, F_4, E_7, E_8$.

b) $\mathcal{E} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $\Phi = A_l, l \geq 2, D_l, l \geq 5, E_6$.

c) $\mathcal{E} = S_3$ für $\Phi = D_4$.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*

Sei Φ ein Wurzelsystem und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ eine geordnete Menge von einfachen Wurzeln für Φ sowie $A_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$, sodass $A = (A_{ij})$ die Cartan-Matrix von Φ bzgl. obiger einfacher Wurzeln ist. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen, sodass DAD^{-1} symmetrisch positiv definit ist.

b) Die Diagonalmatrix aus a) ist eindeutig bis auf ein skalares Vielfaches.

Aufgabe 4. *(2 Punkte)*

Bestimmen Sie das Dynkin-Diagram und das Wurzelsystem Φ, welches zu folgender Cartan-Matrix gehört:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/lie`
Abgabe bis spätestens 22. Dezember 2011, bei den Kästen an Hörsaal 2.