Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 9 9. Dezember 2011

Wie in der Vorlesung arbeiten wir mit einem Euklidischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum E.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $\Phi^\vee$ das duale Wurzelsystem zu einem Wurzelsystem Φ sowie $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$. Zeigen Sie: $\Delta^\vee$ ist eine Basis von Φ.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ eine Basis von E, $H_{\gamma_i} = \{x \in E \mid (x, \gamma_i) > 0\}$, $\Phi \subseteq E$ eine beliebige endliche Teilmenge sowie P_α die Hyperebene assoziiert zu $\alpha \in \Phi$. Zeigen Sie:

a) $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \neq \emptyset$,

b) $\bigcap_{\gamma_i} H_{\gamma_i} \neq \emptyset$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Phi$ eine Basis von Φ und sei $0 \neq \lambda = \sum_{i=1}^l k_i \alpha_i,\ k_i \in \mathbb{Z}$, alle $k_i \geq 0$ oder alle $k_i \leq 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $k\lambda \in \Phi$, oder es existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass $\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^l k_i' \alpha_i$ mit bestimmten $k_i' > 0$ und bestimmten $k_i' < 0$.
Hinweis: Angenommen, $k\lambda \notin \Phi$, so $P_\lambda \not\subset \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Finden Sie ein μ und ein σ mit $0 = (\lambda, \mu) = (\sigma\lambda, \sigma\mu)$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien $\alpha \neq \beta \in \Phi$ und $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) =: E' \subset E$. Zeigen Sie, dass $E' \cap \Phi$ bzw. $\Phi_{\alpha,\beta} := \Phi \cap (\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta)$ Wurzelsysteme für E' sind. Stimmen diese überein? Zeigen Sie im Falle $\alpha, \beta \in \Delta$, dass die Weyl-Gruppe $\mathcal{W}_{\alpha,\beta}$ von $\Phi_{\alpha,\beta}$ erzeugt ist von den Einschränkungen τ_α, τ_β auf E' von $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$, d.h. $\mathcal{W}_{\alpha,\beta}$ ist eine Untergruppe von $\mathcal{W}$.