Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 8 2. Dezember 2011

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $0 \neq \alpha \in V$. Ein Automorphismus s_α von V, der die zwei Eigenschaften: (i) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, (ii) die Menge H der Elemente von V, die von s_α festgelassen werden, ist eine Hyperebene von V, hat, heisst **Symmetrie mit Vektor** α. Zeigen Sie:

a) s_α ist ein Symmetrie mit Vektor α genau dann, wenn $s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$, wobei $\alpha^* \in V^*$ eindeutig mit $\alpha^*(\alpha) = 2$.

b) Sei R eine endliche Teilmenge von V, sodass $\langle R \rangle = V$. Dann gibt es höchstens eine Symmetrie mit Vektor α, die R invariant lässt.

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*
Sei V zunächst einfach als $\mathbb{R}$-Vektorraum (*ohne* fixierte Euklidische Struktur) betrachtet. Eine endliche Teilmenge R von V heisst **Wurzelsystem**, wenn folgendes gilt:

a) $|R| < \infty,\ \langle R \rangle = V,\ 0 \notin R$,

b) Die einzigen Vielfachen von $\alpha \in R$ sind $\pm\alpha$.

c) Für alle $\alpha \in R$ existiert eine Symmetrie s_α mit Vektor α, die R invariant lässt,

d) Für alle $\alpha, \beta \in R$ ist $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z} \cdot \alpha$,

Beschreiben Sie, wie man analog die Weyl-Gruppe definieren kann. Zeigen Sie ausserdem folgende Aussagen: Ist R ein Wurzelsystem im obigen Sinne, so existiert eine positiv definite symmetrische Bilinearform $(\ ,\ )$ auf V, die invariant unter der Weyl-Gruppe von R ist. Erläutern Sie, wie man mit dieser Form ein Wurzelsystem im Sinne der Vorlesung erhält. Beschreiben Sie den Zusammenhang von α^* und $\alpha^\vee$. Ist R eine Teilmenge von V, die nur die Eigenschaften a), c), d) erfüllt, so sind die einzig möglichen Vielfachen von $\alpha \in R$: $\pm 1/2, \pm\alpha, \pm 2\alpha$. Zeigen Sie dann, dass $\{\alpha \in R \mid 2\alpha \notin R\}$ ein Wurzelsystem ist. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel sein kann, auch wenn möglicherweise $(\alpha, \beta) < 0$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei Φ ein Wurzelsystem eines Euklidischen Vektorraums V mit Weyl-Gruppe $\mathcal{W}$. Zeigen Sie: $\Phi^\vee$ ist ein Wurzelsystem von V, dessen Weyl-Gruppe kanonisch isomorph zu $\mathcal{W}$ ist. Es gilt $\langle \alpha^\vee, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$. Zeichnen Sie ein Bild von $\Phi^\vee$ in den Fällen A_1, B_2.
