Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 7 — 25. November 2011

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $L(m)$ der $m+1$-dimensionale Vektorraum über K mit Basis $(v_0, \ldots, v_m)$. Für $x, y, h \in \mathfrak{sl}_2(K)$ wie zuvor und $\lambda = m$ definieren wir (mit $v_i = 0$ für $i \notin \{0, \ldots, m\}$) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i,\ y.v_i = (i+1)v_{i+1},\ x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$. Zeigen Sie, dass $L(m)$ so zu einem irreduziblen $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul wird.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Seien

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_3(K)$$

und $\phi : \mathfrak{sl}_3(K) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_3(K)$. Ein Paar $(m_1, m_2) \in K^2$ heisst **Gewicht** für ϕ, wenn $v \neq 0$ in V existiert mit $\phi(h_1)(v) = m_1 v,\ \phi(h_2)(v) = m_2 v$. Zeigen Sie: Jede Darstellung von $\mathfrak{sl}_3(K)$ hat mindestens ein Gewicht, wobei die Gewichte m_1, m_2 ganze Zahlen sind.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie für $L = \mathfrak{sl}_n(K)$ und $L = \mathfrak{sp}_n(K)$ die maximale torale Unteralgebra, die Wurzeln und die Wurzelräume.