**Universität Heidelberg**
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

# Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

**Aufgabenblatt 6** 18. November 2011

Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)*
Sei $L$ eine auflösbare Lie-Algebra über $K$. Zeigen Sie: Jede irreduzible Darstellung von $L$ ist eindimensional.

**Aufgabe 2.** *(5 Punkte)*
Eine Lie-Algebra $L$, für die $\mathrm{Rad}(L) = Z(L)$ gilt, wollen wir **reduktiv** nennen. Zeigen Sie:

a) Ist $L$ reduktiv, so ist $L$ vollständig reduzibel, aufgefasst als $L$-Modul über die ajungierte Darstellung. Insbesondere zerlegt sich $L$ als direkte Summe von $Z(L)$ und $[L, L]$.

b) Ist $L$ vollständig reduzibel als als $L$-Modul, so ist $L$ reduktiv.

Man überlege sich, dass folgende Lie-Algebren reduktiv sind: $L$ halbeinfach, $L$ abelsch, $L = \mathfrak{gl}_n(K)$.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*
Sei $L$ eine einfache Lie-Algebra $K$. Seien $\beta(x, y)$ und $\gamma(x, y)$ zwei symmetrische, assoziative Bilinearformen auf $L$. Zeigen Sie: Sind $\beta$, $\gamma$ nicht-degeneriert, so existiert ein Skalar $\lambda \in K$ mit $\lambda \cdot \beta = \gamma$.
*Hinweis*: Schurs Lemma.

**Aufgabe 4.** *(3 Punkte)*
Sei $V$ ein $L$-Modul. Zeigen Sie: $V$ ist die direkte Summe von irreduziblen $L$-Untermoduln genau dann, wenn jeder $L$-Untermodul von $V$ ein $L$-Komplement in $V$ hat.

---