

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 5

11. November 2011

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel (in Charakteristik p) für eine auflösbare Lie-Algebra, dessen derivierte Algebra nicht nur aus nilpotenten Endomorphismen besteht.

Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ für einen endlich-dimensionalen F -Vektorraum. Zeigen Sie: Ist L auflösbar, so gilt $\text{Tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [L, L], y \in L$.

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Zeigen Sie: jede Lie-Algebra der Dimension 1 oder 2 ist nicht halbeinfach.

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Sei F ein Körper der Charakteristik 0 und

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die geordnete Standardbasis von $\mathfrak{sl}_2(F)$. Berechnen Sie die duale Basis zur Standardbasis bezüglich der Killing Form.