Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 4 4. November 2011

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra. Zeigen Sie: $\mathrm{Der}(L)$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(L)$, und $\mathrm{ad}(L)$, die Menge aller inneren Derivationen, ist ein Ideal darin.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper. Zeigen Sie: $\mathfrak{sl}_n(K) = [\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)]$.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*
Sei L eine Lie-Algebra und I ein Ideal von L. Zeigen Sie:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $I^{(n)}$ und I^n sind Ideale in L.

b) L ist auflösbar genau dann, wenn $\mathrm{ad}(L) \subset \mathrm{Der}(L)$ auflösbar ist.

c) L ist nilpotent genau dann, wenn $\mathrm{ad}(L) \subset \mathrm{Der}(L)$ nilpotent ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper und V ein dreidimensionaler Vektorraum mit Basis $\{x, y, z\}$. Zeigen Sie:

a) Die Relationen $[x, y] = z, [x, z] = y, [y, z] = 0$ mit den Relationen $(1), (2)$ aus den Axiomen einer Lie-Algebra (Definition 1 II §1) machen V zu einer Lie-Algebra.

b) V ist auflösbar, aber nicht nilpotent.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/lie`
Abgabe bis spätestens 11. November 2011 vor der Vorlesung, bei den Kästen an Hörsaal 2.