Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 3 28. Oktober 2011

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Ist G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und U eine Umgebung der 1 in G, so wird G von U erzeugt (d.h. für die von U erzeugte Untergruppe H in G gilt $H = G$).

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Sei G die Lie-Gruppe $SO(3) = SO(3, \mathbb{R})$. Wir fixieren folgende Matrizen:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\{J_x, J_y, J_z\}$ bilden eine Basis von $\mathfrak{so}(3)$. Beschreiben Sie die Elemente $\exp(tJ_x), \exp(tJ_y)$, $\exp(tJ_z)$, $t \in \mathbb{R}$, und zeigen Sie, dass diese die Lie-Gruppe $SO(3)$ erzeugen.
Hinweis: Aufgabe 1 von diesem und Aufgabe 1 vom letzten Blatt. Nehmen Sie an, dass wir wissen, dass SO(n) zusammenhängend ist. Wie könnte man das beweisen?

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Sei $\mathrm{Ad}_{Sp(1)} : Sp(1) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(1))$ induziert duch die Konjugation auf $Sp(1)$.

a) $\mathrm{Ad}_{Sp(1)}(x) = hxh^{-1}$ für $h \in \mathrm{Sp}(1), x \in \mathfrak{sp}(1)$,

b) $\mathrm{Bild}(\mathrm{Ad}_{Sp(1)}) \cong SO(3)$,

c) $\ker(\mathrm{Ad}_{Sp(1)}) = \mathbb{Z}/2$.

Hinweis: Man kann identifizieren: $Sp(1) = SU(2), \mathfrak{sp}(1) = \mathfrak{so}(3)$, und damit die Wirkung von $\mathrm{Ad}_{Sp(1)} : SU(2) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) \cong GL_3(\mathbb{R})$ auf den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

berechnen. Dann verwende man Aufgabe 2.