Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Lie-Algebren und Lie-Gruppen

Wintersemester 2011/12

Aufgabenblatt 2 21. Oktober 2011

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe (als abstrakte Gruppe). Zeigen Sie: Ist H eine Mannigfaltigkeit, so ist $H \subset G$ abgeschlossen.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Ist G eine Lie-Gruppe, so bezeichnen wir mit $\exp_G : L(G) \to G$ die zugehörige Exponentialabbildung. Seien nun G und H Lie-Gruppen. Zeigen Sie: $\exp_{G \times H} = \exp_G \times \exp_H$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie für folgende Lie-Gruppen G die Lie-Algebra LG und möglichst explizit die zu jedem $v \in LG$ gehörige Ein-Parameter-Gruppe:

a) $G = V$ für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V,

b) $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$,

c) $G = \mathrm{Aut}(V)$ für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei G eine Lie-Gruppe und $c(g) : G \to G$ die zu $g \in G$ assoziierte Konjugationssabbildung $x \mapsto gxg^{-1}$. Dies induziert eine Abbildung $Ad : G \to \mathrm{Aut}(LG)$ und damit eine Abbildung $ad : LG \to L\mathrm{Aut}(LG)$. Zeigen Sie: $[X, Y] = ad(X)(Y)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/lie`
Abgabe bis spätestens 28. Oktober 2011 vor der Vorlesung, bei den Kästen an Hörsaal 2.