Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 13 10. Juli 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie für folgende symmetrische Matrizen A, B über $\mathbb{R}$ jeweils die Eigenwerte und Orthonormalbasen, für die A und B in Diagonalform sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $U \leq V$ ein Unterraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

a) Zeigen Sie: f ist diagonalisierbar genau dann, wenn ein Skalarprodukt auf V existiert, sodass f für dieses selbstadjungiert ist.

b) Sei V nun schon euklidisch und $f : V \to U \hookrightarrow V$ die Orthogonalprojektion auf U. Zeigen Sie, dass f selbstadjungiert ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei A eine positiv-definite symmetrische 2×2-Matrix über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine untere Dreiecksmatrix $L \in M_2(\mathbb{R})$ mit positiven Einträgen auf der Diagonalen existiert, sodass $A = LL^t$. Bestimmen Sie eine solche Zerlegung für $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Bemerkung: Diese Zerlegung existiert sogar für allgemeine $n \times n$-Matrizen. Sie wird unter anderem in der Numerik verwendet. Wie könnte man dies beweisen?

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist A symmetrisch und nilpotent (d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $A^m = 0$), so gilt $A = 0$. Zeigen Sie ausserdem, dass diese Aussage über $\mathbb{C}$ falsch ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 17. Juli 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF288.