Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 11 26. Juni 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Ist $f : G \to \mathbb{R}$ eine zweifach differenzierbare Funktion für eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$, so kann man zu jedem $v \in G$ die Hesse-Matrix $f''(v)$ definieren, die eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$ ist (vgl. Aufgabe 1, Blatt 10).

a) Zeigen Sie, wie $f''(v)$ für $v \in G$ eine quadratische Form $q(v)$ auf $\mathbb{R}^n$ induziert. Formulieren Sie die Begriffe der positiven oder negativen Definitheit für $q(v)$ (vgl. Abschnitt 12.3 des Analysis 2 Skripts).

b) Berechnen Sie für folgende Beispiele unter Verwendung der zu $f_i''(0,0)$ assoziierten quadratischen Form, ob ein (lokales) Minimum, Maximum oder kein Extremum an der Stelle $(0,0)$ vorliegt:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x,y) = 2 - x^2 - y^2, \quad f_3(x,y) = y^2 - x^2.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, $V = K^n$ der Standard-K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $q : V \to K$ eine quadratische Form, gegeben durch $x \mapsto x^t \cdot A \cdot x$ für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ist symmetrisch, und es gilt $q(x) = x^t \cdot \frac{1}{2}(A + A^t) \cdot x$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $q : V \to \mathbb{R}, (x,y,z)^t \mapsto x^2 + y^2 - z^2$, d.h. q ist eine quadratische Form. Sei $C = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$ sowie die (affine) Ebene $E \subset V$ definiert durch $E = \{(x,y,z)^t \in V \mid z = 1\}$.

a) Beschreiben Sie geometrisch die Menge $S^1 := C \cap E$.

b) Offensichtlich gilt $(-1,0,1) \in S^1$. Zeigen Sie, dass jeder andere Punkt $(x,y,1) \in S^1$ von der Form $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper und (V,q), (V',q') quadratische Räume über K sowie $s : V \to V'$ eine lineare Abbildung, sodass $q'(s(v)) = q(v)$ gilt für alle $v \in V$. Zeigen Sie: Ist q nicht-ausgeartet, so ist s injektiv.
Hinweis: Stellen Sie ein kommutatives Diagramm auf, das die Abbildungen $\beta_{q,1}$, $\beta_{q',1}$, s und $s^* : (V')^* \to V^*, \varphi \mapsto \varphi \circ s$ involviert.