Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 10 19. Juni 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei G eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, d.h. $f'(v)$ ist eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$ für jedes $v \in G$. Wir identifizieren

$$(\mathbb{R}^n)^* \cong (\mathbb{R}^n)^t = \{(x_1, \ldots, x_n) | \; \forall i : x_i \in \mathbb{R}\} \quad (\mathbb{R}^n \text{ als Spaltenvektoren}),$$

via $e_i^* \mapsto e_i^t$, wobei e_i den i-ten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, und nehmen an, dass die Funktion $f' : G \to (\mathbb{R}^n)^t$ wieder differenzierbar ist. Beschreiben Sie, wie man man $f''(v)$ für alle $v \in G$ als eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ auffassen kann.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\beta : V \times W \to K$ eine Bilinearform, die bzgl. Basen $(v_i)_{i=1,\ldots n}$ von V bzw. $(w_j)_{j=1,\ldots m}$ von W die Strukturmatrix B hat. Sind andere Basen $(v_i')_{i=1,\ldots n}$ von V bzw. $(w_j')_{j=1,\ldots m}$ von W gegeben, so bezeichne S die Basiswechselmatrix von $(v_i')_{i=1,\ldots,n}$ nach $(v_i)_{i=1,\ldots,n}$ bzw. T die Basiswechselmatrix von $(w_j')_{j=1,\ldots,m}$ nach $(w_j)_{j=1,\ldots,m}$. Zeigen Sie: Ist B' die Strukturmatrix von β bzgl. $(v_i')_{i=1,\ldots n}$ und $(w_j')_{j=1,\ldots m}$, so gilt $B' = S^t BT$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2 und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

a) Sei β eine beliebige Bilinearform auf $V \times V$, und bezeichne $\tilde{\beta}$ die daraus gewonnene Bilinearform $(v, w) \mapsto \beta(w, v)$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2} \cdot (\beta + \tilde{\beta})$ eine symmetrische Bilinearform bzw. $\frac{1}{2} \cdot (\beta - \tilde{\beta})$ eine alternierende Bilinearform ist.

b) Folgern Sie: $(V \otimes V)^* = (S^2(V))^* \oplus (\bigwedge^2(V))^*$. Insbesondere lässt sich jede Bilinearform auf V eindeutig in eine Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform zerlegen.

c) Folgern Sie weiter die Existenz einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \bigwedge^2(V) \longrightarrow V \otimes_K V \longrightarrow S^2(V) \longrightarrow 0.$$

Variante: Zeigen Sie die Existenz der Sequenz aus c) zuerst und folgern Sie den Rest. Wie sehen die Abbildungen aus?

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper und $\beta : V \times W \to K$ eine Bilinearform auf zwei K-Vektorräumen V, W. Sind $X \subset V$ bzw. $Y \subset W$ beliebige Teil*mengen*, so definiert man die **orthogonalen Komplemente**

$$X^\perp := \{y \in W | \; \forall x \in X : \beta(x, y) = 0\}, \quad {}^\perp Y := \{x \in V | \; \forall y \in Y : \beta(x, y) = 0\}.$$

Zeigen Sie:

a) $X^\perp$ und ${}^\perp Y$ sind Teilräume von W bzw. V.

b) $X^\perp = \langle X \rangle^\perp$ und ${}^\perp Y = {}^\perp \langle Y \rangle$ ($\langle - \rangle$ bezeichnet den Aufspann).

c) ${}^\perp W = \operatorname{Ker}(\beta_1)$ und $V^\perp = \operatorname{Ker}(\beta_2)$.

d) Sind X bzw. Y Teilräume von V bzw. W, so gilt ${}^\perp W \cap X = \operatorname{Ker}(\beta_1|_X)$ bzw. $V^\perp \cap Y = \operatorname{Ker}(\beta_2|_Y)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 26. Juni 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF288.