Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 9 12. Juni 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien R ein kommutativer Ring mit 1, M, N R-Moduln sowie $f : M \to N$ eine R-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) f setzt sich auf eindeutige Weise zu einem Homomorphismus $T(f) : T(M) \to T(N)$ von R-Algebren fort.

b) Ist $R = \mathbb{Z}$, $M = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sowie f die natürliche Inklusion, so ist $T(f)$ nicht injektiv.

Bemerkung: Ist $f : M \to N$ surjektiv, so ist $T(f) : T(M) \to T(N)$ dies auch.

Aufgabe 2. (UAE für die Tensoralgebra) *(4 Punkte)*
Seien R ein kommutativer Ring mit 1, M ein R-Modul und A eine kommutative R-Algebra mit 1. Zeigen Sie:

a) Jeder R-Modulhomomorphismus $M \to A$ setzt sich auf eindeutige Weise zu einem R-Algebrenhomomorphismus $T(M) \to A$ fort.

b) Die Fortsetzung aus a) liefert eine Bijektion $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(T(M), A)$.

Hinweis: Sie erhalten die Umkehrabbildung in b), indem Sie jeden R-Algebrenhomomorphismus $T(M) = R \oplus M \oplus T^1(M) \oplus \ldots \to A$ auf M einschränken.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie, dass

$$\dim_K S^k(V) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

gilt.
Hinweis: Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen n-Tupel $(n_i)_{i=1,\ldots n}$ von ganzen Zahlen $n_i \geq 0$, sodass $\sum_{i=1}^n n_i = k$ gilt.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Wir betrachten $\mathbb{Q}$ (aufgefasst als $\mathbb{Z}$-Modul) sowie für $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, den $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] := \{\frac{a}{m^k} |\ a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie:

a) Für $n \geq 2$ gilt $\bigwedge^n \mathbb{Q} = 0$.

b) Für $n \geq 2$ ist $\bigwedge^n \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ ein $\mathbb{Z}$-Torsionsmodul.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 18. Juni 2014, 19 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF288.