Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 8 5. Juni 2014

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*
Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die bilineare Abbildung

$$b : V \times V^* \longrightarrow \mathrm{End}_K(V), \quad (v, \lambda) \longmapsto (w \mapsto \lambda(w) \cdot v)$$

einen Isomorphismus $b_* : V \otimes_K V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(V)$ induziert (V^* bezeichnet den Dualraum von V). Zeigen Sie damit, dass die Komposition von Endomorphismen auf $V \otimes V^*$ gegeben ist durch die Vorschrift $(v \otimes \lambda) \circ (w \otimes \mu) = (\lambda(w) \cdot v) \otimes \mu$.
Hinweis: Zeigen Sie mittels Basiswahlen, dass b_* injektiv ist und berechnen Sie die Dimensionen.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Seien $R,\ S$ kommutative Ringe mit 1 und $R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass man einen Isomorphismus von *Ringen* $R[T] \otimes_R S \cong S[T],\ f(T) \otimes s \mapsto s \cdot f(T)$ hat, wobei $R[T] \otimes_R S$ via $(f(T) \otimes r) \cdot (g(T) \otimes s) = (f(T) \cdot g(T)) \otimes (r \cdot s)$ mit einer Ringstruktur ausgestattet sein soll.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Seien R ein kommutativer Ring mit 1, $S : 0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln und N ein weiterer R-Modul. Zeigen Sie:

a) Die Sequenz von R-Moduln

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Hinweis: Zeigen Sie mit der UAE des Tensorprodukts, dass $M_3 \otimes_R N \cong M_2 \otimes_R N / \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathrm{id})$.

b) Man hat kanonische Isomorphismen von R-Moduln $R \otimes_R N \cong N$ und $N \otimes_R R/(r) \cong N/rN$ für $r \in R$.

c) Ist $r \in R$ kein Nullteiler, $M_1 = M_2 = R$ und α die Multiplikation mit r, d.h. man betrachtet die Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot r} R \longrightarrow R/(r) \longrightarrow 0,$$

so erhält durch tensorieren dieser Sequenz mit N die exakte Sequenz von R-Moduln

$$N_r \longrightarrow N \xrightarrow{\cdot r} N \longrightarrow N/rN \longrightarrow 0,$$

wobei $N_r := \{x \in N |\ rx = 0\}$.

d) Finden Sie ein Beispiel einer Sequenz S und eines R-Moduls N wie oben, sodass $\alpha \otimes \mathrm{id}$ nicht injektiv ist.