Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 7 29. Mai 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Seien K ein Körper, V bzw. W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ bzw. $(w_j)_{j=1,\dots,m}$. Zeigen Sie, dass $(v_i \otimes w_j)_{i=1,\dots n, j=1,\dots m}$ eine Basis von $V \otimes_K W$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie für $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots m$ die bilineare Abbildung $f_{i,j} : V \times W \to K$, die $f_{i,j}(v_k \times w_l) = \delta_{ki} \cdot \delta_{jl}$ erfüllt.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$ die universelle Abbildungseigenschaft für das Tensorprodukt $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ erfüllt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Verifizieren Sie folgende Behauptungen für Beispiele von Tensorprodukten:

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

b) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = 0$ für Primzahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p \neq q$.

c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Seien K und L Körper mit $K \subset L$, sodass K ein Unterkörper von L ist, sowie V ein K-Vektorraum und W ein L-Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $V \otimes_K L$ mittels $a \cdot (v \otimes b) := v \otimes (a \cdot b)$ für $v \in V$ $a, b \in L$ ein L-Vektorraum ist.

b) Zeigen Sie, dass man einen natürlichen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\mathrm{Hom}_L(V \otimes_K L, W) \cong \mathrm{Hom}_K(V, W)$$

hat.

Bemerkung: Der Isomorphismus in b) ist sogar ein Isomorphismus von L-Vektorräumen. Wieso?