Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 6 22. Mai 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine Normalform folgender Matrizen, aufgefasst jeweils als Matrizen über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (d.h. in allen neun Fällen!):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ genau dann ähnlich sind, wenn ihre Minimalpolynome sowie ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen. Wie verhält es sich, wenn $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sind?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeine Normalform folgender Matrix aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ und geben Sie eine Basis an, bzgl. derer diese angenommen wird:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Sei $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge diagonalisierbarer Endomorphismen eines K-Vektorraums V, wobei $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ gelte für alle $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie, dass eine Basis B von V existiert, sodass die Abbildungsmatrix A_i von f_i bzgl. B in Diagonalgestalt ist.

b) Berechnen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ gemeinsam diagonalisiert.