Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 3 1. Mai 2014

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Sei M eine abelsche Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass M genau auf eine Art als $\mathbb{Z}$-Modul aufgefasst werden kann.

b) Sei M endlich und ungleich 0. Kann M ein $\mathbb{Q}$-Modul sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1, sodass jedes Ideal (aufgefasst als R-Modul) endlich erzeugt ist. Sei F ein freier R-Modul von endlichem Rang und $M \subset F$ ein Untermodul. Zeigen Sie, dass M endlich erzeugt ist.
Wenn R ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 und F ein freier R-Modul ist, ist dann jeder Untermodul $M \subset F$ frei? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie alle Ketten

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_l = M$$

mit $l = l_{\mathbb{Z}}(M)$. Berechnen Sie für jede Kette M_{i+1}/M_i für $0 \leq i \leq l-1$. Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Zeigen Sie als Zwischenschritt zunächst foglende Aussage: Sind $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \mid m$, so hat man einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}/\frac{m}{n}\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. *(5 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wir wollen die Aussage ($R^m \cong R^n \Rightarrow n = m$) zeigen, was man auf verschiedene Weisen machen kann. Hier werden wir Determinanten benutzen, die wir in der LA1 auch schon für Matrizen über kommutativen Ringen (via der Leibniz-Formel) definiert hatten.

a) Sei $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in R. Wir definieren die adjunkte (oder komplementäre) Matrix $A^{\#}$ zu A genau wie über Körpern. Verifizieren Sie die Formel $A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot I_n = A^{\#} \cdot A$.

b) Zeigen Sie, dass $A \in M_n(R)$ invertierbar ist genau dann, wenn $\det A \in R^{\times}$. Folgern Sie, dass wenn $A, B \in M_n(R)$ und $A \cdot B = I_n$ ist, man $B \cdot A = I_n$ hat.

   Hinweis: Sie dürfen die Formel $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, welche für die Determinante über R auch gültig ist, verwenden.

c) Zeigen Sie: $R^m \cong R^n \Rightarrow n = m$, indem Sie den Isomorphismus und $m < n$ annehmen, Basen fixieren und eine Matrixbedingung $A \cdot B = I_n$ folgern, die zum Widerspruch führt.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 8. Mai 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF288.