Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 2 24. April 2014

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Seien R ein Hauptidealring und $0 \neq a, b \in R$. Zeigen Sie:

a) $a \mid \mathrm{kgV}(a,b),\ b \mid \mathrm{kgV}(a,b)$, und falls $e \in R$ mit $a \mid e,\ b \mid e$, so folgt $\mathrm{kgV}(a,b) \mid e$.

b) $Ra \cap Rb = R\,\mathrm{kgV}(a,b)$.

c) $\mathrm{kgV}(a,b) \cdot \mathrm{ggT}(a,b)$ ist assoziiert zu $a \cdot b$.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass das Quadrat der Betragsfunktion

$$N : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N},\ x = a + ib \longmapsto N(x) := a^2 + b^2$$

aus $\mathbb{Z}[i]$ einen Euklidischen Ring macht. Insbesondere ist R also faktoriell.

Hinweis: Betrachten Sie $R \subset \mathbb{C}$ als "Gitter" und setzen Sie N auf $\mathbb{C}$ fort.

b) Seien $x, y, z \in R$ und es gelte $x = yz$. Zeigen Sie: $N(x) = N(y) \cdot N(z)$.

c) Zeigen Sie, dass $x \in R$ eine Einheit ist genau dann, wenn $N(x) = 1$.

d) Zeigen Sie, dass $2 \in R$ *kein* Primelement ist und finden Sie eine Zerlegung in Primfaktoren.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

a) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie: Die Menge $\{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ ist ein Ideal von R.

b) Sei $R = \mathbb{Z}[T]$ der Polynomring in einer Variablen über $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass R kein Hauptidealring ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Ideal $(2, T)$.

c) Finden Sie ein Beispiel eines Rings R und zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sodass $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ kein Ideal ist.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)*

Berechnen Sie für folgende Euklidische Ringe R und Elemente $x, y \in R$ jeweils $\mathrm{ggT}(x,y)$ und finden Sie $u, v \in R$ mit $\mathrm{ggT}(x,y) = ux + vy$:

a) $R = \mathbb{Z},\ x = 11760,\ y = 8932$,

b) $R = \mathbb{R}[T],\ x = T^3 - 2T^2 - T + 2,\ y = T^3 - 4T^2 + 3T$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 30. April 2014, 19 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF288.