Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel

Lineare Algebra 2

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt 1 17. April 2014

Dieses Übungsblatt wiederholt wichtige Begriffe aus der Linearen Algebra 1.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W_1, W_2 Untervektorräume von V mit der Eigenschaft

$$V = U \oplus W_1, \quad V = U \oplus W_2.$$

Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi &: V \to V,\ x = u_1 + w_1 \mapsto u_1 \quad (u_1 \in U, w_1 \in W_1) \\ \psi &: V \to V,\ x = u_2 + w_2 \mapsto w_2 \quad (u_2 \in U, w_2 \in W_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $W_1 = W_2$ genau dann, wenn $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Inverse der 4×4-Matrix A über $\mathbb{Q}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die *Anzahl* der Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{F}_7$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V = \{f(T) \in \mathbb{R}[T] :\ \mathrm{grad}(f) \leq 3\}$$

sowie $B = \{T^i |\ i = 0, \ldots, 3\}$ die Standardbasis von V.

a) Sei $C = \{(T - i)^3 |\ i = 0, \ldots 3\}$. Zeigen Sie, dass C eine Basis von V ist.

b) Für $f \in V$ sei $D(f) := f'(-1) \in \mathbb{R}$ (d.h. ist $f(T) = \sum_{i=0}^{3} a_i T^i$, so gilt $f'(-1) = \sum_{i=1}^{3} i a_i (-1)^{i-1}$). Zeigen Sie, dass $D \in V^*$ und stellen Sie D als Linearkombination der Dualbasis von B bzw. der Dualbasis von C dar.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

eine 3×3-Matrix über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren sowie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ in Diagonalgestalt ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/la2`
Abgabe bis spätestens 24. April 2014 vor der Vorlesung, bei den Kästen am Eingang von INF288.