Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 12 24. Januar 2011

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R ein Noetherscher Ring und $S \subset R$ eine (zentrale) multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Zeigen Sie: $K_n M_S(R) = \varinjlim_{s \in S} G_n(R/sR)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{A}$ eine exakte Kategorie und $B \in \mathcal{A}$. Ein **zulässiger Layer** von B ist ein Paar von Unterobjekten repräsentiert durch eine Sequenz $B_1 \hookrightarrow B_2 \hookrightarrow B$ von zulässigen Monomorphismen. Der Quotient B_2/B_1 heisst **zulässiger Subquotient** von B. Zeigen Sie, dass ein Morphismus $A \to B$ in QA einem Isomorphismus $j : B_2/B_1 \cong A$ von A mit einem zulässigen Subquotienten von B entspricht, und dass die Komposition in $Q\mathcal{A}$ aus "Subquotient eines Subquotienten ist Subquotient" entsteht.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei S eine simpliziale Menge und PS der Pfadraum, d.h. die simpliziale Menge, die durch Komposition von $P : \Delta^{\mathrm{op}} \to \Delta^{\mathrm{op}}$ mit S entsteht. Sei S_0 die konstante simpliziale Menge $\underline{n} \mapsto S_0$. Zeigen Sie, dass PS schwach äquivalent zu S_0 ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ gegeben. Für $D \in \mathcal{D}$ ist die Unterkategorie $F^{-1}(D)$ von $\mathcal{C}$ gegeben durch Objekte C mit $F(C) = D$ sowie Morphismen in $\mathcal{C}$, die auf die Identität von D abgebildet werden. F heisst **prägefasert**, falls für jedes $D \in \mathcal{D}$ die Inklusion $F^{-1}(D) \hookrightarrow D\backslash F$ einen rechtsadjungierten Funktor hat. Dual heisst F **präcogefasert**, falls $F^{-1}(D) \hookrightarrow F/D$ einen linksadjungierten Funktor hat. Ist F prägefasert, so ist zu $f : D \to D'$ der Basiswechsel $f^* : F^{-1}(D') \hookrightarrow D\backslash F \to F^{-1}(D)$ definiert. Ist analog F präcogefasert, so hat man den Cobasiswechsel $f_* : F^{-1}(D) \hookrightarrow F/D' \to F^{-1}(D')$.
Sei F nun präcogefasert.

a) Zeigen Sie, dass $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ prägefasert ist.

b) Leiten Sie die duale Formulierung von Quillens Theorem B unter Benutzung von $D\backslash F$ und F^{op} her.

c) Ist jeder Cobasiswechsel f_* eine Homotopieäquivalenz, so induziert $F^{-1}(D) \to \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Homotopiefasersequenz für jedes $D \in \mathcal{D}$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 31. Januar 2011 vor der Übung.