Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 11 17. Januar 2011

Auf diesem Blatt wollen wir einsehen, dass die K-Theorie einer kleinen exakten Kategorie $\mathcal{A}$, wie wir sie über den Raum $BQ\mathcal{A}$ definiert haben, isomorph zur K-Theorie der Waldhausenkategorie $(\mathcal{A}, co(\mathcal{A}) = i(\mathcal{A}))$ ist, wobei $i(\mathcal{A})$ die Kategorie der Isomorphismen von $\mathcal{A}$ sei. Als Referenz dient der Artikel von Waldhausen, "Algebraic K-Theory of Spaces", Lecture Notes Mathematics 1126, 1985.

Aufgabe 1. *(16 Punkte)*

a) Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Waldhausenkategorie, in der $co(\mathcal{C}) = i(\mathcal{C})$. Sei $s_n\mathcal{C}$ als Menge die Kategorie $S_n\mathcal{C}$, sodass die Funktoren δ_i, s_i eine simpliziale Menge $s.\mathcal{C}$ definieren. Zeigen Sie, dass man eine Homotopieäquivalenz $|s.\mathcal{C}| \to |iS.C|$ hat.

b) Zeigen Sie, dass ein Objekt $A_{\cdot} \in iS_3\mathcal{A}$ einen Morphismus in QA von A_{12} nach A_3 induziert.

c) Zeigen Sie, dass ein Objekt $A_{\cdot} \in iS_5\mathcal{A}$ eine Sequenz $A_{23} \to A_{14} \to A_5$ von Zeilenmorphismen in $Q\mathcal{A}$ induziert.

d) Ist X eine simpliziale Menge, so ist die **Segal Subdivision** $\mathrm{Sub}(X)$ folgende simpliziale Menge: $\underline{n} \mapsto X_{2n-1}$, und die Abbildungen $\partial_i' : X_{2n+1} \to X_{2n-1}$ bzw. $\sigma_i' : X_{2n+1} \to X_{2n+3}$ sind erklärt durch $\partial_i\partial_{2n+1-i}$ bzw. $\sigma_i\sigma_{2n+1-i}$, $0 \leq i \leq n$. Man kann zeigen, dass, wenn X der Nerv einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist, man eine Homotopieäquivalenz $|\mathrm{Sub}(X)| \to |X|$ hat. Zeigen Sie, dass eine simpliziale Abbildung $\mathrm{Sub}(s.\mathcal{A}) \to NQ\mathcal{A}$ existiert, die damit eine Abbildung $|iS.\mathcal{A}| \to BQA$ definiert.

e) Sei $iQ_n\mathcal{A}$ folgende Kategorie: Objekte sind Sequenzen $A_0 \to \ldots \to A_n$ in $Q\mathcal{A}$, Morphismen sind die Isomorphismen. Zeigen Sie, dass $iQ.\mathcal{A}$ eine simpliziale Kategorie ist. Man hat eine Homotopieäquivalenz $BQ\mathcal{A} \to |iQ.\mathcal{A}|$.

f) Zeigen Sie, dass man für jedes n hat eine Äquivalenz $\mathrm{Sub}(iS_n\mathcal{A}) \cong iQ_n\mathcal{A}$, die eine Äquivalenz von simplizialen Kategorien $\mathrm{Sub}(iS_{\cdot}\mathcal{A}) \cong iQ_{\cdot}\mathcal{A}$ induziert. Diese ist sogar eine Homotopieäquivalenz, da sie dies in jedem Grad ist.

g) Zeigen Sie, dass die Abbildung aus f) in folgendes Diagramm passt:

$$\begin{tikzcd}
{|s.\mathcal{A}|} \arrow[d, "\cong"] & {|\mathrm{Sub}(s.\mathcal{A})|} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & BQ\mathcal{A} \arrow[d, "\cong"] \\
{|iS.\mathcal{A}|} & {|\mathrm{Sub}(iS.\mathcal{A})|} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] & {|iQ.\mathcal{A}|}
\end{tikzcd},$$

d.h. $|iS.\mathcal{A}| \to BQA$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 24. Januar 2011 vor der Übung.