Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 10 20. Dezember 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $I \to \mathrm{CATEX}$, $i \mapsto \mathcal{A}_i$, ein Funktor von einer kleinen filtrierten Kategorie in die Kategorie der exakten Kategorie mit exakten Funktoren, sodass alle $\mathcal{A}_i$ exakte Unterkategorien einer fixierten abelschen Kategorie $\mathcal{B}$ sind. Zeigen Sie: $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_i$ ist eine exakte Kategorie und es gilt $K_n(\mathcal{A}) \cong \varinjlim K_n(\mathcal{A}_i)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $R = \varinjlim_I R_i$ ein Ring mit Eins. Sei $P'(R_i)$ die Kategorie der idempotenten Matrizen über R_i und $P(R_i)$ wie gewohnt die Kategorie der endlich erzeugbaren projektiven R_i-Moduln. Zeigen Sie, dass $i \mapsto P(R_i)$ im allgemeinen kein Funktor ist, wohl aber $i \mapsto P'(R_i)$, sowie dass $P(R_i)$ bzw. $P(R)$ äquivalent zu $P'(R_i)$ bzw. $P'(R) = \varinjlim P'(R_i)$ ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie die behauptete Bijektion $C(\Sigma X, Y)^0 \cong C(X, \Omega Y)^0$ ($C(A,B)^0$ sind die stetigen Abbildungen punktierter Räume A, B, versehen mit der KO-Topologie).

Aufgabe 4. (Kleisli Rektifizierung) *(4 Punkte)*
Wir wollen eine andere Methode betrachten, mit der man allgemeiner das Problem mit Limiten aus Aufgabe 2 umgehen kann. Sei dazu $I \to \mathrm{CAT}$ ein *laxer 2-Funktor* (früher auch Pseudo-Funktor genannt), d.h. eine Vorschrift, zu der eine Zuordnung $i \mapsto \mathcal{A}_i$ sowie ein Funktor $f_* : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ für jedes $i \in I$ bzw. jeden Morphismus $f : i \to j$ gehört. Dabei ist gefordert, dass man natürliche Transformationen $(id_i)_* \Rightarrow id_{\mathcal{A}_i}$ bzw. $(fg)_* \Rightarrow f_* g_*$ hat, die alle kompatibel sind für z.B. $(fgh)_* \Rightarrow f_* g_* h_*$ bzw. $f_* \Rightarrow f_*$. Beispielsweise ist ein Funktor ein laxer 2-Funktor, bei dem jede Transformation die Identität ist.
Sei nun ein laxer 2-Funktor $I \to \mathrm{CATEX}$ (I, CATEX wie in Aufgabe 1) gegeben. Sei $\mathcal{A}(i)$ die Kategorie, deren Objekte Paare $(A_j, f : j \to i)$ mit $A_j \in \mathcal{A}_j$ und f eine Abbildung in I ist. Morphismen zwischen $(A_j, f : j \to i)$ und $(A_k, g : k \to i)$ sind Paare $(h : j \to k, \theta_j)$, wobei $f = gh$ in I bzw. $\theta_j : h_*(A_j) \cong A_k$ in $\mathcal{A}_k$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}(i)$ äquivalent zu $\mathcal{A}_i$ und $i \mapsto \mathcal{A}_i$ ein Funktor ist, d.h. man hat $K_n\mathcal{A} \cong \varinjlim K_n(\mathcal{A}_i)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 10. Januar 2011 vor der Übung.