Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 9 13. Dezember 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Sei $\Delta(n) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},\ \underline{m} \mapsto \mathrm{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n})$. Zeigen Sie: $|\Delta(n)| \cong \Delta_n$, das Standard n-Simplex.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei G eine (diskrete) Gruppe, $\underline{G}$ die in der Vorlesung definierte kleine Kategorie assoziiert zu G.

a) Wir wollen folgende Kategorie $\tilde{G}$ definieren: Objekte seien die Elemente von G, bezeichnet mit $[g]$. Morphismen $\mathrm{Hom}_{\tilde{G}}([g],[h])$ bestehen aus einem eindeutigen Pfeil $\delta(g,h)$, sodass $\delta(g,h) \circ \delta(h,i) = \delta(g,i)$. Zeigen Sie, dass somit tatsächlich eine Kategorie definiert wird und man einen Funktor $\tilde{G} \to \underline{G}, [g] \mapsto *, \delta(g,h) \mapsto hg^{-1}$ hat.

b) G operiere auf $\tilde{G}$ vermöge $g([h]) = [hg^{-1}],\ i(\delta(g,h)) = \delta(gi^{-1}, hi^{-1})$ sowie auf $\underline{G}$ trivial. Zeigen Sie, dass G frei auf $B\tilde{G}$ operiert und man eine G-Abbildung $B\tilde{G} \to B\underline{G}$ hat.

c) Wir nehmen an, dass wir $B\tilde{G}/G \cong B\underline{G}$ erkannt haben. Zeigen Sie, dass $B\tilde{G}$ zusammenziehbar ist und $\pi_1(B\underline{G}) \cong G, \pi_i(B\underline{G}) = 0, i \neq 1$ gilt.

Bemerkung: Mit c) kann man folgern, dass $B\underline{G}$ der klassifizierende Raum von G ist.

Aufgabe 3. *(8 Punkte)*

Sei S eine simpliziale Menge. Ein $x \in S_n$ heisst degeneriert, falls $x = s_i y$ für ein y und ein i. Zeigen Sie:

a) Jede Morphismus $f : \underline{n} \to \underline{m}$ in Δ lässt sich eindeutig schreiben als $f = \delta_{i_1} \ldots \delta_{i_s} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_t}$ mit $0 \leq i_s < \ldots < i_1 \leq m$, $0 \leq j_1 < \ldots < j_t < n$ und $n - t + s = m$.

b) Jeder Punkt $(\sigma_n, t_n) \in |S|$ ist äquivalent zu einem eindeutigen nicht-degenerierten Punkt.

c) $|S|$ ist ein CW-Komplex, der je eine Zelle für jedes nicht-degenerierte n-Simplex von S hat (i.e. für $(\sigma_n, t_n) \in |S|$ gilt: σ_n ist nicht-degeneriert und $t_n \in \Delta_n^\circ$).

d) Sei T eine weitere simpliziale Menge. Die Projektionen $S \times T \to S, T$ induzieren eine Bijektion $|S \times T| \to |S| \times |T|$, der ein Homöomorphismus ist, falls $|S| \times |T|$ ein CW-Komplex ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 20. Dezember 2010 vor der Übung.