Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 8 6. Dezember 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $f : B \to C$ eine Abbildung in $Ch(\mathcal{A})$, der Kategorie der Kettenkomplexe einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Der **Abbildungskegel** $\mathrm{cyl}(f)$ von f ist definiert als der Kettenkomplex

$$\mathrm{cyl}(f)_n = B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n, \quad d_n(b, b', c) = (d(b) + b', -d(b), d(c) - f(b'))$$

(wenn wir der Einfachheit halber annehmen, dass wir die Abbildungen durch "Elemente" beschreiben), wobei d jeweils das entsprechende Differential von B oder C ist. Man hat natürliche Morphismen $\alpha : C \to \mathrm{cyl}(f), c \mapsto (0, 0, c)$ bzw. $\beta : \mathrm{cyl}(f) \to C, (b, b', c) \mapsto f(b) + c$. Zeigen Sie: α ist bzgl. β eine Homotopieäquivalenz, d.h. insbesondere induziert β die in der Vorlesung benutzte Quasi-Isomorphie.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins und $Ch^b(P(R)) \subset Ch^b_{\mathrm{perf}}(R)$ die Kategorie der strict perfekten bzw. beschränkten perfekten Komplexe. Zeigen Sie, dass diese Inklusion die in der Vorlesung definierten Voraussetzungen des Approximationssatzes erfüllt, d.h. man hat $K_0(R) \cong K_0(Ch_{\mathrm{perf}}(R))$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Waldhausen-Kategorie und $\mathcal{E}_n, n \in \mathbb{N}$, folgenden Kategorie:
Objekte sind Sequenzen von Kofaserungen in $\mathcal{C}$

$$A : 0 = A_0 \rightarrowtail A_1 \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail A_n,$$

Abbildungen sind die natürlichen Abbildungen dieser Sequenzen.
Sei $co(\mathcal{E})$ die Familie der Morphismen in $\mathcal{E}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $f : A \to B$, so ist jeder vertikale Pfeil in dem Diagramm von Kofasersequenzen

$$\begin{array}{ccccc} A_j/A_i & \rightarrowtail & A_k/A_i & \twoheadrightarrow & A_k/A_j \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_j/B_i & \rightarrowtail & B_k/B_i & \twoheadrightarrow & B_k/B_j \end{array}$$

eine Kofaserung in $\mathcal{C}$. Sei zudem $w(\mathcal{E})$ die Familie von Morphismen in $\mathcal{E}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $f : A \to B$, so ist jedes $f_i : A_i \to B_i$ eine schwache Äquivalenz in $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:

a) $(\mathcal{E}, co(\mathcal{E}), w(\mathcal{E}))$ ist eine Waldhausen-Kategorie.

b) Man hat $K_0(\mathcal{E}_n) \cong \bigoplus_{i=1}^n K_0(\mathcal{C})$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ (Quaternionen) und $m = 1$ bzw. $m = 2$ bzw. $m = 4$ falls $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{H}$. Bezeichne $D^k \cong \Delta_k$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^k$ und $K\mathbb{P}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ den projektiven Raum über K. Sei

$$f_n : D^{mn} \to K\mathbb{P}^n, \quad (z_0, \ldots, z_{n-1}) \mapsto (z_0 : \ldots : z_{n-1}, (1 - \sum_{i<n} z_i \overline{z}_i)^{1/2}).$$

Zeigen Sie, dass $(K\mathbb{P}^k, f_k)_{0 \le k \le n}$ eine CW-Zerlegung von $K\mathbb{P}^n$ ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 13. Dezember 2010 vor der Übung.