Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 6 22. November 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins.

a) Seien $r, s, t \in R$, sodass $(1 + rs)t = 1$. Zeigen Sie, dass $(1 + rs)(1 + sr)^{-1} \in E_2(R)$ via der kanonischen Inklusion $R^\times \to \mathrm{GL}(R)$.

   Hinweis: Betrachten Sie $e_{12}(r + rsr)e_{21}(st + s)e_{12}(-r)e_{21}(-s)$.

b) Sei $r \in R^\times$ oder $r, s \in \mathrm{Rad}(R)$. Zeigen Sie: $(1 + rs)(1 - sr)^{-1} \in [R^\times, R^\times]$, und man hat $W(R) = [R^\times, R^\times]$, wenn R ein lokaler Ring ist.

   Hinweis: Sind $r, s \in \mathrm{Rad}(R)$, so ist $t = 1 + s - sr \in R^\times$. Berechnen Sie $[t^{-1} + r, t]$ sowie $(1 + rs)(1 + r)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins, sodass $R = \varinjlim R_i$. Zeigen Sie: $K_1(R) \cong \varinjlim K_1(R_i)$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei R ein Euklidischer Ring. Zeigen Sie, dass $E_n(R) = \mathrm{SL}_n(R)$ für alle n, d.h. $SK_1(R) = 0$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper und V ein unendlich-dimensionaler Vektorraum über K. Sei $R = \mathrm{End}_K(V)$. Ist $\alpha \in \mathrm{GL}_n(R)$, so kann man $\alpha^\infty = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \ldots)$ als $\mathrm{Aut}(W) \cong \mathrm{GL}(R)$ auffassen, wobei $W = \bigoplus_\infty V^n$, da $V \cong \bigoplus_\infty V$. Zeigen Sie, dass $\alpha \oplus \alpha^\infty$ konjugiert zu α^∞ ist, d.h. $K_1(R) = 0$.

Zusatzaufgabe. Man mache sich die Existenz und Eindeutigkeit der Determinante $\det : \mathrm{GL}(R) \to R^\times/[R^\times, R^\times]$ für lokale Ringe klar, vgl. etwa Rosenberg, "Algebraic K-Theory and its applications", Theorem 2.2.5. Allgemeiner kann man auch eine Determinante $\det : \mathrm{GL}(R) \to R^\times/W(R)$ für semilokale Ringe definieren.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 29. November 2010 vor der Übung.