Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 5 15. November 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei k ein Körper und J das Ideal von $k[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$, das von X_iX_j erzeugt wird. Sei $R = k[X_1, X_2, \dots]/J$ und I das Ideal in R, das vom Bild der X_i erzeugt wird. Zeigen Sie: $K_0(\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}\text{-}R) = 0$, $K_0(\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}\text{-}R/I) = G_0(R/I) = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ eine exakte Kategorie einer kleinen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass eine exakte Unterkategorie $\mathcal{C}' \subset \mathcal{A}$ existiert mit $\widehat{\mathcal{C}} \cong \mathcal{C}'$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Eine exakte Kategorie $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ heisst **spaltende exakte Kategorie**, falls jede kurze exakte Sequenz in $\mathcal{E}$ isomorph zu einer Sequenz der Form

$$0 \to B \to B \oplus D \to D \to 0$$

ist.
Sei $\mathcal{C}$ eine kleine additive Kategorie und $\mathcal{A} = \underline{\mathrm{Ab}}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ die abelsche Kategorie aller additiven kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\underline{\mathrm{Ab}}$. Der Yoneda-Funktor

$$h : \mathcal{C} \to \mathcal{A}, \quad h(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C), \quad h(f : C \to D) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D),$$

bettet $\mathcal{C}$ als volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$ ein. Zeigen Sie, dass jedes Objekt von $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ein projektives Objekt ist. Folgern Sie, dass $\mathcal{C}$ durch diese Einbettung eine spaltende exakte Kategorie ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{A}$ eine kleine exakte oder abelsche Kategorie. Zeigen Sie: Ist $[A_1] = [A_2]$ in $K_0(\mathcal{A})$, so existieren kurze exakte Sequenzen

$$0 \to C' \to C_1 \to C'' \to 0, \quad 0 \to C' \to C_2 \to C'' \to 0$$

in $\mathcal{A}$ mit $A_1 \oplus C_1 \cong A_2 \oplus C_2$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 22. November 2010 vor der Übung.