Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 4 8. November 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

a) Ist I ein Nildeal (d.h. jedes Element ist nilpotent) und sind P_1, P_2 endlich erzeugbare und projektive R-Moduln mit $P_1/I \cong P_2/I$, so folgt $P_1 \cong P_2$.

b) Ist I ein nilpotentes Ideal (d.h. es existiert ein n mit $I^n = 0$), so entsprechen die Isomorphieklassen von endlich erzeugbaren projektiven R-Moduln eineindeutig den Isomorphieklassen von endlich erzeugbaren projektiven R/I-Moduln.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Idempotente $\overline{e} \in R/I$ das Bild eines Idempotenten $e \in R$ ist, und dass jeder andere Lift von der Form $ueu^{-1}, u \in 1 + I$, ist. Wenden Sie dies auf den Ring $M_n(R)$ an.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

a) Sei M ein Monoid, der direkter Limes von abelschen Monoiden M_i ist. Zeigen Sie, dass $M^{-1}M = \varinjlim_i M_i^{-1}M_i$ in der Kategorie der abelschen Gruppen.

b) Sei R ein Ring mit Eins, der direkter Limes von Ringen R_i ist. Zeigen Sie, dass $K_0(R) \cong \varinjlim_i K_0(R_i)$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{A}$ eine skelett-kleine abelsche Kategorie und $\mathcal{B}$ eine Serre Unterkategorie. Der in der Vorlesung angegebene Funktor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ lässt sich auf Morphismen wie folgt beschreiben: Ist $f : M \to N$ in $\mathcal{A}$, so hat man $\Gamma := \mathrm{graph}(f) \subset M \times N$. Dann ist $T(f)$ die Klasse des Dachs $M \leftarrow \Gamma \to N$, das durch die Projektionen $M \times N \xrightarrow{p_1} M$ bzw. $M \times N \xrightarrow{p_2} N$ induziert wird. Wir nehmen an, dass wir $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ als additive Kategorie und $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ als additiven Funktor erkannt haben.

a) Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. Zeigen Sie: $T(f) = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, $T(f)$ Monomorphismus $\iff \mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, $T(f)$ Epimorphismus $\iff \mathrm{Coker}(f) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.

b) Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ und $i : K \to M$ der Kern von f sowie $p : N \to C$ der Cokern von f. Zeigen Sie: $T(i) : T(K) \to T(M)$ ist der Kern und $T(p) : T(N) \to T(C)$ der Cokern von f.

c) Zeigen Sie (unter der Annahme, dass wir $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ als abelsche Kategorie erkannt haben), dass T ein exakter Funktor ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei R ein Noetherscher Ring, $S \subset R$ eine zentrale multiplikativ abgeschlossene Teilmenge sowie $M(R)$ die Kategorie der endlich erzeugbaren R-Moduln und $M_S(R)$ die Unterkategorie der der endlich erzeugbaren S-Torsionsmoduln. Zeigen Sie: $M_S(R)$ ist eine Serre Unterkategorie und $M(R)/M_S(R)$ ist äquivalent zur Kategorie $M(S^{-1}R)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 15. November 2010 vor der Übung.