Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 3 1. November 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins. R heisst **Direkter Summenring**, falls ein R-Modulisomorphismus $R \cong R^2$ existiert. Mit $R^\infty := R^{(\mathbb{N})}$ und $E = \mathrm{End}_R(R^\infty)$ ist R^∞ ein E-Linksmodul, und E kann mit unendlichen Matrizenring, dessen Spalten bis auf endlich viele gleich Null sind, identifiziert werden. Zudem sei $C(R) \subset E$ der Untering der unendlichen Matrizen, dessen Spalten und Zeilen bis auf endlich viele gleich Null sind. Zeigen Sie:

a) Falls $R^\infty = V_1 \oplus V_2$ als R-Linksmoduln, so gilt $E = I_1 \oplus I_2$ mit Rechtsidealn $I_i = \{f \in E| \, f(R^\infty) \subseteq V_i\}$. Umgekehrt folgt aus $E = I_1 \oplus I_2$ als E-Rechtsmodul, dass $R^\infty = V_1 \oplus V_2$ mit $V_i = I_i R^\infty$. Folglich ist E ein Direkter Summenring.

b) $C(R)$ ist ein Direkter Summenring.

c) $K_0(E) = K_0(C(R)) = 0$.

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*
Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen mit Eins und $I \subset R$ ein Ideal von R, sodass I isomorph auf ein Ideal in S abgebildet wird, d.h. man hat ein Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R/I \arrow[r, "\overline{f}"] & S/I \end{tikzcd}$$

mit $R = \{\overline{r}, s) \in (R/I) \times S | \, \overline{f}(\overline{r}) = s \mod I\}$. Wir bezeichnen dieses Datum (R, S, I) als **Milnor-Quadrat**. Ist M_1 ein S-Modul, M_2 ein R/I-Modul und $g : M_2 \otimes_{R/I} S/I \cong M_1/IM_1$ ein S/I-Modulisomorphismus, so sei $M = (M_1, g, M_2)$, die **Verklebung** von M_1 und M_2 mittels g, der Kern der R-linearen Abbildung $M_1 \times M_2 \to M_1/IM_1$, $(m_1, m_2) \mapsto \overline{m}_1 - g(\overline{f}(m_2))$. Im folgenden bezeichnen P_i bzw. Q_i endlich erzeugbare projektive Moduln über den jeweiligen Ringen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \in \mathrm{GL}_n(S/I)$ das Bild einer Matrix von $\mathrm{GL}_n(S)$ oder $\mathrm{GL}_n(R/I)$, so ist der verklebte Modul $P = (S^n, g, (R/I)^n)$ ein freier Modul.

b) $(P_1, g, P_2) \oplus (Q_1, h, Q_2) \cong (P_1 \oplus Q_1, \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, P_2 \oplus Q_2)$.

c) Ist $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ so gilt folgende Identität in $\mathrm{GL}_{2n}(R)$:

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Ist $g \in \mathrm{GL}_n(S/I)$ und M der Modul, der durch Verkleben von S^{2n} und $(R/I)^{2n}$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}$ entsteht, so gilt $M \cong R^{2n}$.

Bitte wenden!

e) Ist $P_1 \oplus Q_1 \cong S^n,\ P_2 \oplus Q_2 \cong (R/I)^n$ und $P_1/IP_1 \cong P_2 \otimes S/I$ sowie $Q_1/IQ_1 \cong Q_2 \otimes S/I$, so sind die R-Moduln P bzw. Q, die durch Verkleben der P_i bzw. Q_i entstehen, endlich-erzeugbar und projektiv.

f) Ist $P_1 \oplus Q_1 \cong S^m$ und $P_2 \oplus Q_2 \cong (R/I)^n$ sowie $g : P_1/IP_1 \cong P_2 \otimes S/I$, so ist $(Q_1 \oplus S^n) \otimes S/I$ isomorph zu $((R/I)^m \oplus Q_1) \otimes S/I$.

g) Ist $P = (P_1, g, P_2)$, so gilt $P \otimes_R S \cong P_1$ und $P/IP \cong P_2$.

h) Jeder endlich erzeubare und projektive Modul von R entsteht durch eine Verklebung wie in g).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

a) Sei $L \xrightarrow{f} M_1 \times M_2 \xrightarrow{(g_1,g_2)} N$ eine exakte Sequenz von abelschen Monoiden (d.h. ist $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ mit $g_1(x_1) = g_2(x_2)$, so existiert $l \in L$ mit $f(l) = (x_1, x_2)$). Sei L cofinal in M_1, M_2 und N. Zeigen Sie, dass man eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$L^{-1}L \to (M_1^{-1}M_1 \oplus M_2^{-1}M_2) \to N^{-1}N$$

hat.

b) Sei (R, S, I) ein Milnor-Quadrat wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass man eine exakte Sequenz

$$K_0(R) \to K_0(S) \oplus K_0(R/I) \to K_0(S/I)$$

von abelschen Gruppen hat.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 8. November 2010 bis zur Übung.