Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 2 22. Oktober 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $E \to X$ ein n-dimensionales Vektorbündel. Zeigen Sie, dass E trivial ist genau dann, wenn n Schnitte $s_1, \dots, s_n$ existieren, sodass $s_1(x), \dots, s_n(x)$ linear unabhängig sind für jedes $x \in X$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und S^k die k-Sphäre. Man hat eine Zerlegung $S^k = D^k_+ \cup D^k_-$ in die obere und untere Hemisphäre mit $D^k_+ \cap D^k_- \cong S^{k-1}$. Sei $f : S^{k-1} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine stetige Abbildung (in diesem Kontext "Clutching"-Funktion genannt) und

$$E_f := (D^k_+ \times \mathbb{C}^n \amalg D^k_- \times \mathbb{C}^n)/\sim,$$

wobei $(x, v) \in \partial D^k_- \times \mathbb{C}^n$ mit $(x, f(x)(v)) \in \partial D^k_+ \times \mathbb{C}^n$ identifiziert wird.

a) Zeigen Sie, dass die natürliche Projektion $E_f \to S^k$ ein n-dimensionales Vektorbündel ist.

b) Seien $f, g : S^{k-1} \to GL_n(\mathbb{C})$ homotop. Zeigen Sie, dass E_f isomorph zu E_g ist, d.h. man hat eine Abbildung
$$\Phi : [S^{k-1}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \to \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k), \quad f \mapsto E_f,$$
wobei $[S^{k-1}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^{k-1} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass Φ eine Bijektion ist (Hinweis: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist pfadzusammenhängend und die $D^k_\pm$ sind kontrahierbar).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien $f, g : S^{k-1} \to GL_n(\mathbb{C})$ Clutching-Funktionen. Unter fg sei die Clutching-Funktion, die durch punktweise Matrizenmultiplikation entsteht, verstanden. Zeigen Sie, dass man einen Isomorphismus $E_{fg} \oplus (S^k \times \mathbb{C}^n) \cong E_f \oplus E_g$ hat.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Projektion $p : E_n(\mathbb{K}^k) \to G_n(\mathbb{K}^k)$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des klassifizierenden Bündels über der Grassmann'schen tatsächlich ein Vektorbündel ist. Hierbei ist $E_n(\mathbb{K}^\infty) = \bigcup_{k \geq n} E_n(\mathbb{K}^k)$, analog für $G_n(\mathbb{K}^\infty)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 29. Oktober 2010, in der Vorlesung.