Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische K-Theorie

Wintersemester 2010/2011

Aufgabenblatt 1 18. Oktober 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum und E, F Vektorbündel über X. Beschreiben Sie, wie man mittels Verkleben die Vektorbündel $E \otimes F$ (Tensorprodukt) bzw. $\wedge^i E$ ($i \geq 0$, i-te äußere Potenz) konstruieren kann.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum und E, F Vektorbündel über X. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{VB}}(E, F) = \Gamma(\mathcal{H}om(E, F))$,

b) $\mathrm{Iso}(E, F) \subset \mathcal{H}om(E, F)$ ist offen.

Aufgabe 3. *(8 Punkte)*
Sei G eine topologische Gruppe, die rechtsstetig auf einem topologischen Raum E operiert, sowie $p : E \to X$ eine stetige Abbildung. Wenn für E gilt:

i) Für $e \in E, g \in G$ gilt $p(eg) = p(e)$,

ii) Für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U und ein G-Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times G$, der eine lokale Trivialisierung von p über U mit typischer Faser G ist (G operiert hier auf $p^{-1}(U)$ durch Einschränkung und auf $U \times G$ durch Rechtstranslation auf dem zweiten Faktor),

so nennt man E ein G-**Prinzipalbündel**.

a) Sei E ein G-Prinzipialbündel und F ein ein topologischer Raum mit linksstetiger G-Operation und $E \times_G F = E \times G/\sim$, wobei $(e, f) \sim (e', f')$ genau dann, wenn ein $g \in G$ existiert mit $(e, f)g := (eg, g^{-1}f) = (e', f')$. Zeigen Sie, dass die Projektion $E \times F \to E$ eine lokal triviale Abbildung $q : E \times_G F \to X$ induziert, die man das **zu** p **assoziierte Faserbündel** mit typischer Faser F bezeichnet.

b) Sei $q : V \to X$ ein n-dimensionales Vektorbündel und $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$E := \coprod_{x \in X} \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, q^{-1}(x))$$

eine Struktur eines G-Prinzipalbündels hat, die einen Isomorphismus

$$E \times_G \mathbb{R}^n \cong V$$

von Vektorraumbündeln induziert.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/k-theorie`

Abgabe bis spätestens 22. Oktober 2010, in der Vorlesung.