Seminarprogramm

Formale Gruppen

Universität Heidelberg, Wintersemester 2012/13

Veranstalter: Jan Kohlhaase, Andreas Riedel
Ort und Zeit: INF 288, MathI HS 3, Di 14–16
Vorkenntnisse: Algebra; spätere Vorträge: Grundkenntnisse lokale Körper

---

Inhalt: Das Seminar befasst sich mit sogenannten *formalen Gruppengesetzen*. Das sind elementare Objekte der Algebra, die in äußerst vielfältigen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Es handelt sich um Potenzreihen, an welche Bedingungen gestellt werden, die den üblichen Gesetzen einer Gruppe entsprechen. Sie treten unter anderem in der algebraischen Geometrie, in der Zahlentheorie, in der Theorie der Liegruppen und in der algebraischen Topologie auf.

Das Seminar orientiert sich im Wesentlichen am Skriptum [1] und stellt zunächst die notwendigen Grundbegriffe bereit. Für eindimensionale formale Gruppen beweisen wir im Anschluss hieran die Klassifikationssätze über $\mathbb{Q}$-Algebren bzw. über algebraisch abgeschlossenen Körpern positiver Charakteristik. Im letzten Fall wird zudem der Endomorphismenring einer formalen Gruppe berechnet. Im letzten Teil des Seminars betrachten wir formale Gruppen über vollständigen, diskreten Bewertungsringen. Wir konstruieren und analysieren den sogenannten *Tate-Modul* einer formalen Gruppe und lernen damit grundlegende Beispiele für p-adische Galoisdarstellungen kennen, wie sie in der arithmetischen Geometrie auftreten.

1. Formale Gruppen: Potenzreihenringe und das Jacobi-Kriterium (vgl. [1], Theorem I.2.2); formale Gruppen und formale Inversion (vgl. Anfang von [1], I.3); Homomorphismen und die Gruppenstruktur auf $\mathrm{Hom}_R(F, G)$ im kommutativen Fall; die Endomorphismen $[n]_G$; die Abbildung D und [1], Proposition III.1.2

2. Lazards Approximationssatz: Lazard-Polynome und Primitivität (vgl. [1], Lemma III.1.1); Lazards Approximationssatz (vgl. [1], Theorem III.1.1); Reduktion auf den Fall eines Körpers; Beweis von [1], Theorem III.1.a (bis Seite 65)

3. Das $\mathbb{Q}$-Theorem: Vorbereitungen (vgl.[1], Lemma III.1.3 und Lemma III.1.4); die Isomorphieklasse der additiven Gruppe (vgl. [1], Theorem III.1.2); das $\mathbb{Q}$-Theorem und seine Varianten (vgl. [1], Corollary III.1.1–3)

4. Die Höhe: Definition und grundlegende Eigenschaften der Höhe eines Homomorphismus in Charakteristik p (vgl. [1], Proposition III.2.1 und ihre Korollare); die Höhe einer formalen Gruppe in Charakteristik p; Vollständigkeit der Homomorphismengruppe bezüglich der Höhen-Filtrierung (vgl. [1], Proposition III.2.2 und Korollar); Formulierung von [1], Theorem III.2.1, und Beweis des vorbereitenden Lemmas III.2.1

5. Der Existenzsatz: Beweis von [1], Theorem III.2.1, S.75 f.; Beweis von [1], Lemma III.2.2 und Lemma III.2.3; Definition einer formalen Gruppe in Normalform; Beweis von [1], Lemma III.2.4

6. Klassifikationssatz und Divisionsalgebren: Beweis von [1], Lemma III.2.5 und Proposition III.2.3; Formulierung und Beweis des Klassifikationssatzes von Lazard (vgl. [1], Theorem III.2.2); Formulierung von [1], Theorem III.2.3; Definition der verwendeten Terminologie für zentrale Divisionsalgebren über $\mathbb{Q}_p$ (vgl. [3], Chapter VI.3 und Corollary 7.1.6)

7. Der Satz von Dieudonné-Lubin: Beweis von [1], Theorem III.2.3, über den Endomorphismenring einer eindimensionalen formalen Gruppe endlicher Höhe über einem separabel abgeschlossenen Körper der Charakteristik p (vgl. [1], S.82 ff.)

8. Reduktion von Homomorphismen: Homomorphismen formaler Gruppen über Körpern (vgl. [1], Proposition IV.1.1 und ihre Korollare); Beweis von [1], Proposition IV.1.2 und des Korollars; Reduktionssatz für Homomorphismen formaler Gruppen über diskreten Bewertungsringen (vgl. [1], Proposition IV.1.3 und Korollar)

9. Äquivalenz von Filtrierungen: Definition der Bewertungs-, Höhen- und p-Filtrierung auf der Endomorphismengruppe; Äquivalenzbeweis im Fall eines vollständigen diskreten Bewertungsringes (vgl. [1], Theorem IV.1.1 und dessen Korollar, Lemma IV.1.1 und Proposition IV.1.4)

10. Die Gruppe der Punkte: Definition und Galoismodulstruktur über einem vollständigen, diskreten Bewertungsring (vgl. [1], Proposition IV.2.1); Isogenien und die Sätze von Lubin-Serre (vgl. [1], Theorem IV.2.1 und Theorem IV.2.2)

11. Logarithmus und Exponentialabbildung: Formulieren und beweisen Sie [1], Theorem IV.2.3; erläutern Sie den Sachverhalt anhand der additiven und der multiplikativen Gruppe (vgl. [1], Bemerkung auf Seite 106, sowie [2], Satz II.5.5); Formulierung des Umkehrsatzes von Lubin ohne Beweis (vgl. [1], Theorem IV.2.4)

12. Der Tate-Modul: Definition und grundlegende Eigenschaften (vgl. [1], S.127 bis S.130 Mitte); die zugeordnete p-adische Galoisdarstellung und der Irreduzibilitätssatz von Serre ohne Beweis (vgl. [1], Theorem IV.4.3)

Literatur

[1] A. Fröhlich: Formal Groups, *Lecture Notes in Mathematics* **74**, Springer, 1968

[2] J. Neukirch: Algebraische Zahlentheorie, Springer, 1992

[3] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg: Cohomology of Number Fields, *Grundlehren Math. Wiss.* **323**, Springer, 2000