Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 13 25. Juni 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei X ein noethersches Schema, $U \subset X$ offen affin. Zeige: Man hat $K_X(U) = Q(\mathcal{O}_X(U))$, sowie $K_{X,x} = Q(\mathcal{O}_{X,x})$ für jedes $x \in X$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $X := \mathrm{Proj}(k[X_0, \dots, X_n]/I) \to \mathbb{P}^n_k$ eine projektive Varietät definiert durch ein homogenes Ideal I sowie $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom Grad d mit $F \notin I$. Beschreibe, wie man in natürlicher Weise zu F einen effektiven Cartier-Divisor D_F assoziieren kann, sodass das abgeschlossene Unterschema definiert durch $(D_F, \mathcal{O}_{D_F})$ gerade das Schema ist, das zu F gehört.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei X ein Schema, $\mathrm{Div}(X)$ die Gruppe der Cartierdivisoren und $\mathrm{Pic}(X)$ die Gruppe der invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln.

a) Zeige: $\sim$ wie in der Vorlesung definiert ist auf $\mathrm{Div}(X)$ eine Äquivalenzrelation, d.h. man hat eine Gruppe $\mathrm{CaCl}(X)$ der Isomorphieklassen von Cartierdivisoren modulo dieser Relation.

b) Sei X ein Schema, sodass K_X eine welke Garbe ist (dies gilt i.a. mit leichten Einschränkungen). Zeige in diesem Fall: $\mathrm{CaCl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$.

Aufgabe 4. *(3 Punkte)*
Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Noetherscher Ring sowie M ein endlich-erzeugbarer A-Modul. Zeige oder importiere aus Algebra 2:

a) M ist einfach genau dann, wenn $M \cong A/\mathfrak{m}$.

b) M ist von endlicher Länge genau dann, wenn ein $r \geq 1$ existiert mit $\mathfrak{m}^r M = 0$.

c) Ist M von endlicher Länge, so gilt $\ln_A(M) = \sum_{i \geq 0} \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^i M / \mathfrak{m}^{i+1} M)$.

d) Ist A eine Algebra über einem Körper k, so gilt $\ln_A(M) \dim_k A/\mathfrak{m} = \dim_k M$.

Abgabe bis spätestens 2. Juli 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.